第1章

信号数学の準備

近年，地上/BS/CSディジタル放送を始めとして，インターネット，ADSL，ディジタル通信，iモード，携帯電話などでは，ありとあらゆる情報がすべてディジタル・データとして統合され，多種多様のサービスが提供されてもいる．いずれのサービスも，ディジタル信号によってもたらされた恩恵でもある．

こうしたサービスにおいては，信号圧縮，信号回復(信号復元)，雑音除去，信号抽出などの種々の信号処理が必ず含まれている．最近の信号処理は，旧来のアナログ的な処理から，演算論理に基づくディジタル的な処理にとって代わりつつある．とくに離散数学に根差した計算アルゴリズムは，信号処理に携わっている技術者にとって必要不可欠のものであり，その本質をしっかりと見据えておかなければならない．

ところで，「信号数学」と聞いて「はてはて，何だろ？」と思われた方がたくさんおられるかもしれない．電気信号，ディジタル信号，アナログ信号，制御信号，テレビジョン画像信号，音声信号など，私たちの身近には‘信号’という2文字が含まれた言葉は枚挙にいとまがない．

本書は，「これから信号処理を勉強したいのだが，どのように進めていったらよいのか，皆目見当がつかない人」とか，「予備知識がないので，どの参考書を読んでもチンプンカンプンで理解できず困っている人」――そんな人のお役に立てればとの一念から，信号処理関連の数学をわかりやすく具体的に解説したものである．

本章では，第2部からのフーリエ変換に関する本格的な解説に先駆け，おもに信号処理の概要，ディジタル信号の正規直交基底ベクトルによる表現，相関関数などについて説明する．その際，“数学”的な難しい説明はほどほどに，信号数学のもつ“とっつきにくさ”を解消してもらうことを最大の目標にして，わかりやすい説明を心がけており，信号数学の“ココロ(心)”がつかめるように配慮している．

なお，第1部の内容は，信号数学的なセンスを身に付けてもらう上でのウォーミング・アップになるものなので，しっかりと読み進めていってもらいたい．

1.1　信号処理とは

一般に，信号とは情報を物理的に具現化したものである．例えば，温度，気圧，騒音量などの計測信号，音楽とか電話音声などの音響信号，テレビ，アニメ，指紋などの画像信号など多種多様である．これらの信号は，いずれも物理量として計測（ある物理量を数値で表現）可能であり，通常適当なセンサによって電気信号に変換される．現在では，味や匂いなどの信号も電気信号に置き換えることが可能になりつつある（**図1-1**）．

他方，携帯電話で音声信号のやり取りをしたいのだけれど，雑音ばかりが大きくて肝心の音声がよく聴き取れないとか，テレビジョン画面にゴーストが出たりして不鮮明で見にくいときなどに，余計な雑音をなるべく抑えて必要な意味のある信号のみを取り出したい，あるいは信号が明瞭になるように改善したい――このようなときに信号処理，信号数学が役に立つ．

このように，信号処理の対象とする信号の中に多種多様の信号成分が含まれていて，その中から必要な成分と不必要な成分とに分別したいときには，

① どのような物理的な性質をもっているのか

② どのような成分が含まれているのか

といったことを知ることにより，必要な成分のみを抽出したり処理することが可能になる．

しかし，対象となる信号の性質や成分がよくわかっていないときには，まず信号のもつ特性と物理的な性質との対応を調べなければならない．つまり，「信号の解析，分析」，わかりやすく言い換えれば，「信号の身元調査」が必要になるのである．そんなときにも「信号処理の理論」，まさしく本書のテーマである「信号数学」の真価が問われることになる．信号を解析することによって，対象となる信号の特徴を浮かび出させることができるようになるわけである（**図1-2**）．

また，信号処理の技術は信号の合成にも大いに力を発揮する．最近の音声読み上げソフトは音声合成の技術を使っており，音声の成り立ちがわかれば，それを利用して合成することも可能になる．こんなときにも信号処理の考え方が役立っている．

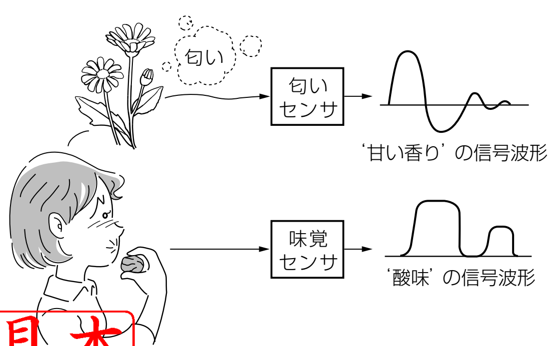

図1-1　いろいろな信号変換

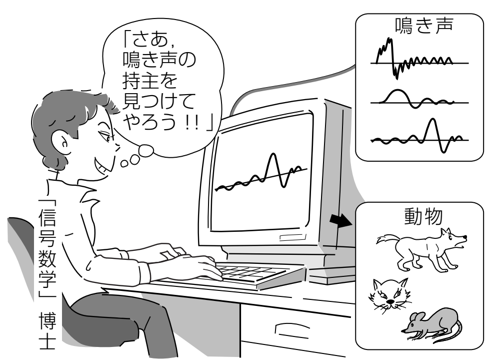

図1-2　「信号数学」は信号の身元調査人

つまるところ，信号処理においては数学的な処理を必ずともなうことになるわけで，「信号数学」の真髄，数式の物理的な考え方や意味を中心に身につけておく必要がある．

1.2　信号処理の例

それでは，信号処理の具体例を実際のデータの処理のようすを示しながら説明していくことにしよう．

● **信号波形の平滑化処理**（不規則性雑音の除去，大まかな信号の変化の把握）

例えば，音声信号に含まれている微量のノイズを取り除いたり，風速の時々刻々の細かな揺らぎ変動を取り除いて緩やかで大まかな風速の変化を見たいときには，信号波形を滑らかにすればよい．この処理は信号波形の「平滑化」といい，平均値を計算することと等価である．

風速の変動例では，瞬時風速の一定の時間範囲における平均値を計算して風速を求めればよく，この操作によって滑らかな曲線のグラフが得られることになるだろう．この操作は「移動平均をとる」といい，注目する時刻の前後のある時間範囲の風速に基づいて平均値を求めていくのである（**図1-3**）．

この「移動平均をとる」処理の数式的な表現を示しておこう．いま，ディジタル信号が測定データ系列として，

$$\{\cdots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\} \quad \cdots\cdots (1)$$

で与えられているとする．このとき，注目するデータ点の値をiとし，その前後のK個のデータ，

$$\underbrace{\overbrace{x_{i-K}, x_{i-K+1}, \cdots, x_{i-1}}^{K\text{個}}, x_i, \overbrace{x_{i+1}, \cdots, x_{i+K-1}, x_{i+K}}^{K\text{個}}}_{(2K+1)\text{個}} \quad \cdots\cdots (2)$$

つまり，全体では$(2K+1)$個のデータの平均値をy_iと表して，

$$y_i = \frac{1}{2K+1}\left(x_{i-K} + x_{i-K+1} + \cdots + x_i + \cdots + x_{i+K}\right) \quad \cdots\cdots (3)$$

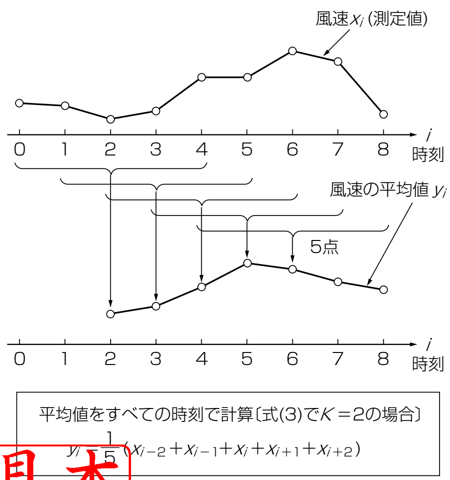

図1-3　移動平均のとりかた（5点，K=2の場合）

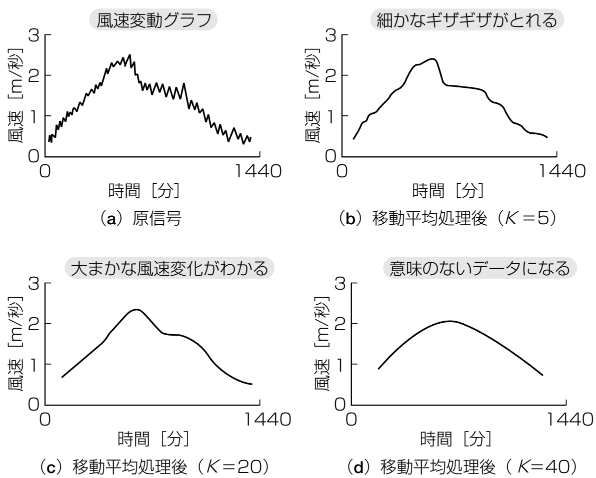

図1-4　移動平均処理による平滑化

のように計算するのである．この式は，総和の記号を用いて，

$$y_i=\frac{1}{2K+1}\sum_{k=-K}^{K}x_{i+k} \quad \cdots\cdots (4)$$

のようにも表せる．

図1-4は，1分ごとの平均風速を丸一日24時間分の変化のようすを表したグラフである．これに移動平均の処理をかけてみよう．考慮する点(時間)の範囲を与えるKの値が大きくなるにしたがって，次第に風速の変化波形も滑らかになっていくことが，この図からわかる．Kの値が小さすぎると平滑化の効果が弱くなり，大きくし過ぎると風速の変化を読み取りにくくなってしまう．

このように「移動平均をとる」処理は，観測データから激しく振動する信号の成分(高い周波数成分)を除去するということを意味している．このとき，除去する周波数の範囲はKの値の大小によってコントロールすることができる．

また，激しく振動する信号として，**図1-5**のような雑音(時間的に不規則に変化する信号で，不規則性信号ともいう)が重畳した測定データを考えてみると，「移動平均をとる」処理は雑音を除去する機能をもっている．つまり，平均値をとるという簡単な計算で，アナログ信号処理回路の平滑化回路(**図1-6**)の機能をディジタル演算回路で肩代わりできることが容易に理解できる．

別な見方をすれば，「移動平均をとる」処理は次のような性質を巧みに利用したローパス・フィル

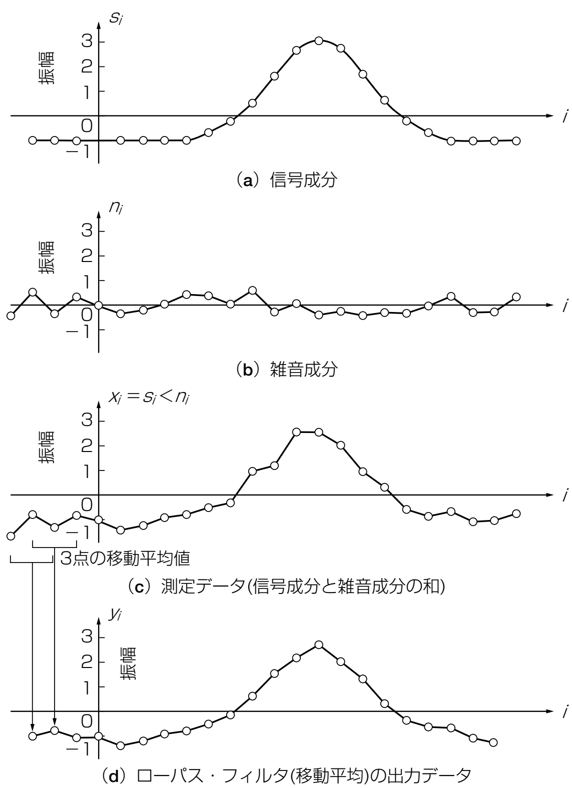

図1-5
移動平均処理による雑音除去
(3点，K=1の場合)

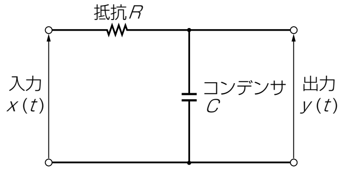

図1-6　アナログ平滑回路の例

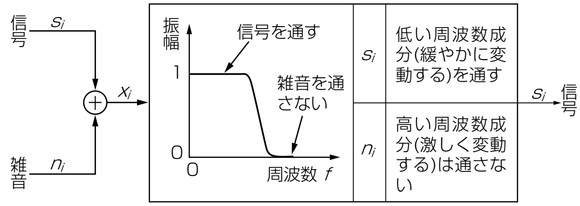

図1-7　ローパス・フィルタによる雑音除去

タ（低域通過形フィルタ）であることもわかる（**図1-7**）．つまり，

i）原信号は比較的緩やかに時間変動し，低い周波数成分をもっていること

ii）雑音は不規則で，時間的に速く激しく変動する性質のものであり，原信号に比べて相対的に高い周波数成分をもっていること

の二つの性質から，雑音のもつ高い周波数成分を除去して低い周波数成分のみを取り出すことができれば，原信号成分のみになり，原信号の推定が可能となる．

このように，低い周波数成分のみを取り出す性質の信号処理を「ローパス・フィルタを通す」といい，平均値計算の式（4）がローパス・フィルタを実現する処理の一つであることが理解される．

● **雑音の抑圧処理**（同期加算）

一般に，信号が雑音の混入によって歪んだときには，往々にして信号処理の技術に頼る傾向があることは否めない．しかしながら，できることなら，まずは雑音の発生，混入する原因の正体を調べ，その除去に努めることが先決である．

例えば，ラジオを聞いているときにガリッガリッという雑音が入ってきているとすれば，近くに電磁波を発するものがないか，蛍光スタンドの安定器が壊れかかっていないかといったことなどを点検し，電気的な知識を総動員して雑音の発生源を断つべきだろう．それでもうまくいかないときに初めて信号処理の方法によるしかないという手順を経て，雑音抑圧を行うようにすべきである．

雑音成分が微量であれば，前述した「移動平均をとる」，つまり平滑化処理である程度の雑音を抑圧することは可能ではある．しかし，雑音成分が大きく，その周波数成分もあまり高くなく，信号の周波数成分との切り分けが困難であるときなどは，平滑化処理はさほど有効な手段だとはいえない．

こうした雑音に対し，信号が周期的に何度も繰り返し得られるような場合の有効な雑音抑圧の方法として，「同期加算」と呼ばれる方法が知られている．

今，N個のサンプル値を有する受信したディジタル信号を$\{x_i\}_{i=0}^{i=N-1}$としよう．受信信号の中には，本来の原信号の成分$\{s_i\}_{i=0}^{i=N-1}$と雑音の成分$\{n_i\}_{i=0}^{i=N-1}$が含まれている．すなわち，

$$x_i = s_i + n_i \quad \cdots\cdots (5)$$

である．

この信号が繰り返し送信され，しかも信号の送信開始位置が常に一定の位置にそろえられる，別な言い方で「同期をとる」ことができると仮定しよう．このとき，k回目に受信した信号を$\{x_i^{(k)}\}_{i=0}^{i=N-1}$と表せば，混入する雑音の波形は受信のたびにおそらく異なっているわけで，これを$\{n_i^{(k)}\}_{i=0}^{i=N-1}$と書く

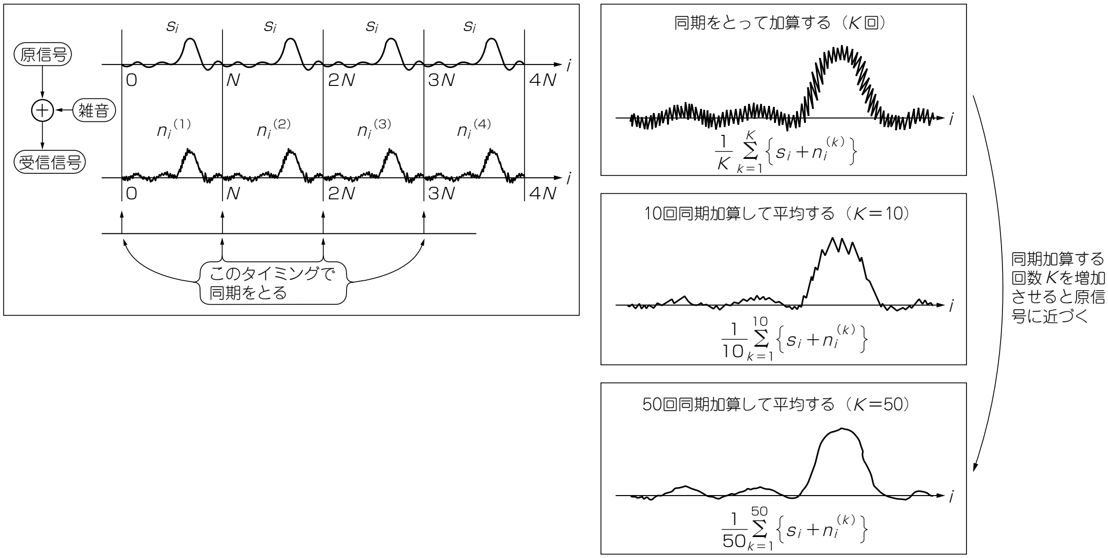

図1-8　同期加算による雑音抑圧処理のようす

ことにする．他方，本来の信号成分$\{s_i\}_{i=0}^{i=N-1}$は，信号の同期がとれてさえいれば常に同じものになるはずである．つまり，

$$x_i^{(k)}=s_i+n_i^{(k)} \quad \cdots\cdots (6)$$

のように表されることになる．

以上の準備を経て，いよいよ雑音の抑圧処理を実行するわけであるが，基本的な考え方は，

『不規則雑音の平均値が0になる』

という確率的な性質を利用することにある．具体的には，雑音を含んだ信号$\left\{x_i^{(k)}\right\}_{i=0}^{i=N-1}$を何度も受信し，それらの平均値を計算するのである．平均値は，受信回数がk回であるとき，受信信号のすべての時刻〔$i=0$，1，…，$(N-1)$〕に対して，

$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}x_i^{(k)}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left\{s_i+n_i^{(k)}\right\}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}s_i+\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}n_i^{(k)} \quad \cdots\cdots (7)$$

を計算することに相当する．この計算のようすを**図1-8**に示す．

図からもわかるように，受信回数が増えるにつれて雑音の成分（ギザギザした波形）が減少していき，原信号が顕著に現れてくるようになる．これは，次のような理由による．

まず，式(7)における右辺の第1項は，同じ信号値s_iをK回加えて，Kで割るわけであるから，明らかに原信号s_iそのものになる．

そして，第2項はどうかといえば，不規則に発生する雑音の平均値は普通0であることから，多数の受信信号中の雑音を加えて平均をとることで，その値はつまるところ0に近づいていくことになるのである．すなわち，数式的には，

$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}n_i^{(k)}\to 0 \qquad (K\to\infty) \quad \cdots\cdots (8)$$

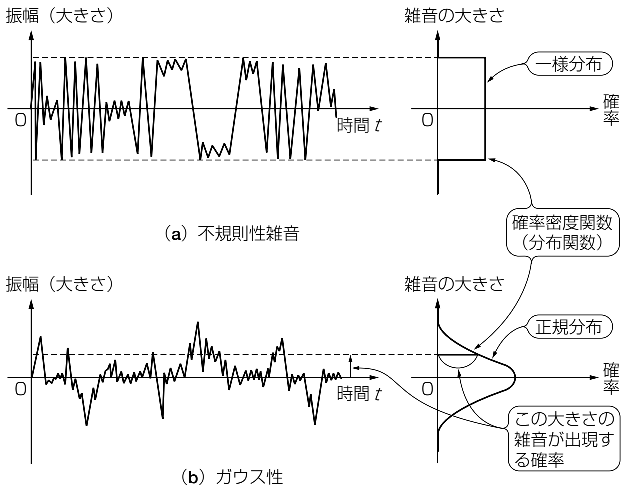

図1-9　雑音の例と平均値

となり，雑音成分はすべての時刻に対して0に近づいていくはずである（**図1-9**）．このように，雑音が混入しても同じ信号成分を含んだ受信信号を，同期をとりつつ平均値を求める処理により，式(7)は，

$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_i^{(k)} \to s_i \qquad (K \to \infty) \quad \cdots\cdots (9)$$

となり，雑音を抑圧して原信号を抽出することが可能になるというわけである．

● 信号波形の変換処理

信号波形の変換処理は「信号の身元調査」を主たる目的とし，時間信号の形状を見ただけではわかりにくい信号の特徴や性質を浮き出させることができる．信号の変換法には多くの種類（フーリエ変換，アダマール変換，ハール変換などが代表的）が知られており，それぞれの特徴を活かした形で利用されている．

例えば，フーリエ変換では信号を正弦波に分解して信号を構成する正弦波の大きさ（振幅），周波数や位相の情報を調べることができる．いわゆる信号の周波数スペクトル分析が実行され，「信号の身元」すなわち「信号の性質」を洗い出せる（**図1-10**）．

そして，フーリエ変換以外の変換法は，一般に正弦波分解には対応しないが，ある種の信号の分解法として位置づけられる．その違いは，変換の際に用いられる基底（フーリエ変換ではsin関数，cos関数）と呼ばれるものに起因しており，どのような信号なのか，またどのような性質を調べたいのかによって適切な変換法を選択する必要がある．

図1-11（**a**）では，16点の信号値を用いてcos波形の1周期が表されている．そして，フーリエ変換した**図1-11**（**b**）では，わずか二つの値で同じ信号を表せていることになる．このことは，時間信号がcos波形の情報（信号の大きさ，周波数，位相）を16個の値の相互関係としてもっているのに対し，そのフーリエ変換値では2個の独立する情報のみで16個の値の相互関係を表すことができるからである．

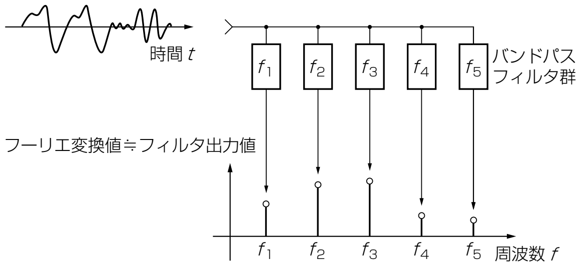

図1-10　フーリエ変換とスペクトル分析

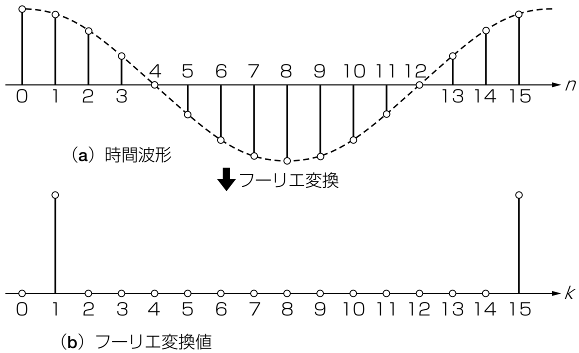

図1-11　フーリエ変換と相関

つまり，時間信号では16個の信号値の相互に関係がある（各信号値間に相関があるという）わけだが，フーリエ変換値では二つの独立した値（無相関な変換値）のみで16個の時間信号値を肩代わりさせられるということになる．

こうした信号変換の特徴をうまく利用すれば，画像や音声などの情報を表現するのに必要なデータ量を低減させること（信号圧縮）ができるのである．

1.3　信号数学の予備知識

これまでは，信号処理としては比較的シンプルな方法のいくつかを例に説明してきた．しかしながら，一歩踏み込んだ内容の信号処理を学んでいくためには，どうしても信号に関わる数学，すなわち「信号数学」の手助けを必要とすることになる．

なぜなら，元の信号がどんな物理量（電圧，電流，圧力，風速など）であったにしても，それが数値データの系列あるいは関数に置き換えられてしまった後では，その系列あるいは関数を如何にして処理するのか，計算するのかといった数学上の問題に帰着されることになってしまうためである．

この数学的な取り扱いがくせ者であり，とくに数式表現と物理的な意味との対応づけが難しい．そんなこともあり，数式展開による本格的な説明の前に，いろいろな数式表現の背景となっている考え方の理解のしやすさを考慮して，読者の皆さんに数学の予備知識の解説を行うことにする．

なんとなく背景がつかめていれば，ちょっと見た目には複雑そうに見える数式も，「なんだ，そう

だったのか，簡単なことだ」という感じをもってもらえるようになるわけである．

● ディジタル信号とN次元ベクトル

今，アナログ信号$x(t)$を等しい時間間隔でサンプリングしたディジタル信号系列を，N点のサンプル値の系列として，

$$\boldsymbol{x} = (x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{N-1}) \qquad \cdots\cdots (10)$$

と書くと，

『N個の信号値からなるディジタル信号$(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{N-1})$が，$N$次元のベクトル$\boldsymbol{x}$として表されることになる』

のである．ここで，N次元ベクトルとは，順序づけられた（時間の経過の順番に並べた）N個の数値の組で表される量のことをいう．

とくに，サンプル数Nを増やしていくことにより，アナログ信号$x(t)$に近づけていけるわけで，

N次元ベクトル　$\boldsymbol{x} = (x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{N-1})$

$\Updownarrow$

ディジタル信号　$(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{N-1})$

$\Updownarrow (N \to \infty)$

アナログ信号　$x(t)$

という相互関係がある．

たとえば，2個のディジタル信号（$N=2$）は2次元ベクトルで，2次元空間つまり平面上である一つの点に対応づけられるし，3個のディジタル信号（$N=3$）は3次元ベクトルで，3次元空間中の一点に対応するわけである．3次元より大きいN次元ベクトルを図示することは困難だが，N次元空間中の一点に対応することになる．この次元Nを無限大にしたもの（アナログ信号に相当）は，連続関数空間とよばれる．

このように，N次元ベクトルは抽象的な空間になってしまうので，これがディジタル信号を取り扱う際のわかりにくさの根本的な原因になっているようでもある．ただ，2次元空間（平面上）のベクトルに対しては図示が容易であり，直感的な理解も得られやすいことから，まずは信号数学の基本知識として2次元ベクトルを用いて，種々の信号ベクトルの性質を説明する．

● 二つの信号の関係の強さを知る

ある信号$x(t)$，$y(t)$をサンプリングし，二つのサンプル値からなるディジタル信号$(x_0,\ x_1)$，$(y_0,\ y_1)$を得たとしよう（**図1-12**）．すると，2次元ベクトルとして，

$$\boldsymbol{x} = (x_0,\ x_1),\ \boldsymbol{y} = (y_0,\ y_1) \qquad \cdots\cdots (11)$$

と表せる．このように，ディジタル信号が2次元ベクトルとして表現できたら，ここから先はベクトル計算に基づいて二つの信号の関係を調べていくことが可能になる．

信号の関係を測る尺度として真っ先に思いつくのは信号間の距離だろうか．つまり，$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$がどれくらい離れているのかを示す尺度であり，この値が小さいほど$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$は接近している，つまり関係が強いといえる．

今，$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の距離を$d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$で表すとき，**図1-13**からも明らかなように，

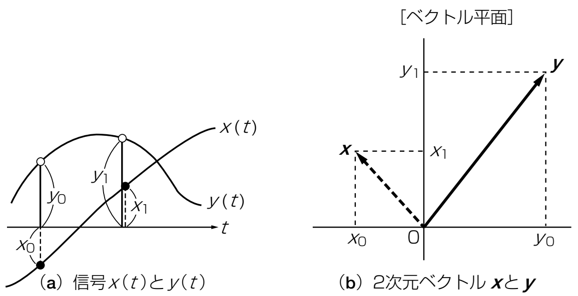

図1-12　ディジタル信号をベクトルで表す

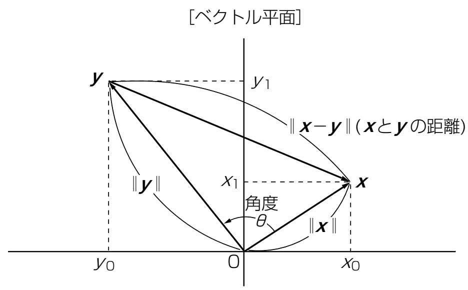

図1-13　2次元ディジタル信号の距離と角度

$$d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sqrt{\left(x_0-y_0\right)^2+\left(x_1-y_1\right)^2} \quad \cdots\cdots (12)$$

となる．ここで，ベクトル $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ の大きさ（絶対値，長さ）を $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ と表すことにすると，

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\left(x_0-y_0\right)^2+\left(x_1-y_1\right)^2} \quad \cdots\cdots (13)$$

となることから，式(12)より，

$$d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \quad \cdots\cdots (14)$$

と表される．$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ はベクトル $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ のノルムとよばれ，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の距離に相当し，ベクトル間の関係の強さを測る一つの尺度と考えられる．

例題1　三つの信号ベクトルを，$\boldsymbol{x}=(1,\ 1)$，$\boldsymbol{y}=(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$，$\boldsymbol{w}=(-1,\ 1)$ とするとき，距離 $d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ と $d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{w})$ を求めよ．

解答1

式(12)に数値を代入して計算する．

$$d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sqrt{\left\{1-\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}^2+\left\{1-\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}^2}=2$$

$$d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{w})=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{1-1\}^2}=2$$

さて，**例題1** の信号ベクトルの相互関係を**図1-14**に示すので，とくと見てもらいたい．この図では，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の距離 $d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{w}$ との距離 $d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{w})$ とが同じなのである．このとき，$\boldsymbol{x}$ を何倍か〔**例題1** では $(1+\sqrt{2})$ 倍〕すれば $\boldsymbol{y}$ を作ることはできるが，$\boldsymbol{w}$ はどうやっても作れないのである．

図1-14において，$\boldsymbol{x}$ という信号から見て等距離にある $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{w}$ ではあるが，作れるという観点からは「信号 $\boldsymbol{w}$ よりは信号 $\boldsymbol{y}$ のほうが信号 $\boldsymbol{x}$ との関係がずっと強い」ということになるわけで，距離という尺度だけでは信号間の関係は表現できないようである．

このことは，信号ベクトル間の距離だけではなく，二つの信号ベクトルがなす角度（偏角，方向）も重要な尺度になることを暗に示している．ベクトルの角度は，二つのベクトルの内積の定義式，

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta \quad \cdots\cdots (15)$$

に基づき，

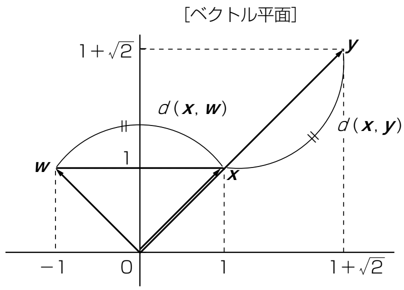

図1-14　距離は同じだが

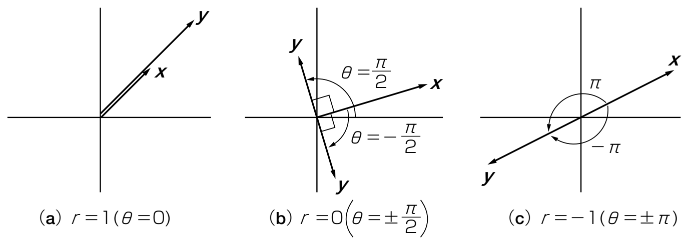

図1-15　角度 θ と相関係数 r

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \quad \cdots\cdots (16)$$

で計算される．これを，

$$r = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \quad \cdots\cdots (17)$$

とおくと，$-1 \leqq \cos\theta \leqq +1$ であるので，

$$-1 \leqq r \leqq +1 \quad \cdots\cdots (18)$$

となることも必然である．この r の値が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の角度に関する関係の強さを表すことになる（**図1-15**）．

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の方向が一致したとき r は最大値 $(+1)$ をとり，角度が大きくなるにつれて r の値は減少していき，正の値から負の値へと変化していく．さらに，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の方向がまったく反対方向になったときは r は最小値 (-1) をとる．この r は相関係数とよばれ，式(17)を見てもわかるとおり，r は二つのベクトルがなす角度のみに依存する尺度であり，ノルムとは無関係であることも知っておいてもらいたい．

とくに，角度が直角(90度)，すなわち $\theta=\pi/2$[rad]のとき，$\cos(\pm\pi/2)=0$ となり，式(15)より，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0 \quad \cdots\cdots (19)$$

という関係が得られる．つまり，内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ が0のときは，信号ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とが直角に交わる（直交するという）わけで，式(17)によれば相関係数 r が0となり，相関がない（無相関）とよばれる．別の言い方をすれば，信号ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とは互いに独立の関係にあることを意味している．

● 内積 $\langle x, y \rangle$ と相関係数 r

ところで，式(15)で示される内積は，ベクトルの成分要素を用いて，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_0\,y_0 + x_1\,y_1 \quad \cdots\cdots (20)$$

と別の表現ができる．また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ とそれ自身の内積は，式(20)において $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ $(y_0=x_0,\ y_1=x_1)$ として，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_0^{\,2} + x_1^{\,2}} \quad \cdots\cdots (21)$$

なる関係式を使って，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = x_0\,x_0 + x_1\,x_1 = x_0^{\,2} + x_1^{\,2} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \quad \cdots\cdots (22)$$

となり，内積とノルムの結びつきがわかる．

さらに，相関係数の式(16)は，式(20)と式(21)の関係を用いて，

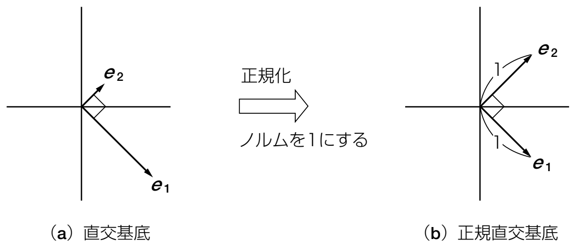

図1-16　直交基底と正規直交基底

$$r = \frac{x_0\ y_0 + x_1\ y_1}{\sqrt{{x_0}^2 + {x_1}^2}\sqrt{{y_0}^2 + {y_1}^2}} \quad \cdots\cdots (23)$$

と表せることもわかる．

● ディジタル信号と正規直交基底による表現

さて，一般的に重さを量るときには，普通ならグラム[g]とかキログラム[kg]を単位として使う．例えば，1単位を1[g]とすれば，10[g]は1[g]の10倍なので10単位と表せることになる．ベクトルで表す信号空間でも同様に，大きさの基準となる単位を決めておくと非常に都合がよい．

重さの例は，1次元の場合で基準となる単位は一つでよかったが，2次元の信号空間では二つを必要とすることになる．

今，**図1-16**(**a**)に示すように，二つの互いに直交するベクトルの組を，

$$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\} \quad \cdots\cdots (24)$$

と表すとき，$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$は“直交基底”とよばれる．ここで，直交基底となるための条件は，単位ベクトル相互の内積が0になることであるから，

$$\langle \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2 \rangle = 0 \quad \cdots\cdots (25)$$

と表される．

さらに，単位ベクトルのノルムが1になる，すなわち，

$$\| \boldsymbol{e}_1 \| = \| \boldsymbol{e}_2 \| = 1 \quad \cdots\cdots (26)$$

のとき，これを“正規直交基底”という〔**図1-16**(**b**)〕．ここで，ノルム(ベクトルの長さ)が1のベクトルは，とくに“単位ベクトル”とよばれる．つまり，単位ベクトルは1単位の大きさを表すベクトルであり，任意の大きさと方向を有する2次元の信号空間すべてを表すための基本単位になるものである．

今，$\boldsymbol{e}_1$方向の信号成分がx_1単位分($x_1\boldsymbol{e}_1$)，$\boldsymbol{e}_2$方向の信号成分がx_2単位分($x_2\boldsymbol{e}_2$)を含む2次元信号ベクトルは，線形結合(一次結合)の式として，

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 \quad \cdots\cdots (27)$$

のように表される．つまり，いかなる2次元信号も式(27)の形式で表せるということが重要なポイントであり，ベクトル$x_1\boldsymbol{e}_1$，$x_2\boldsymbol{e}_2$はそれぞれ$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$に対する$\boldsymbol{x}$の射影とよばれている．

逆に，ある2次元信号ベクトル$\boldsymbol{x}$が与えられたときには，あらかじめ信号分析用に用意された正規直交基底$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$を用いて，式(27)のような線形結合の形で表すためには，係数の組(x_1，x_2)の算出

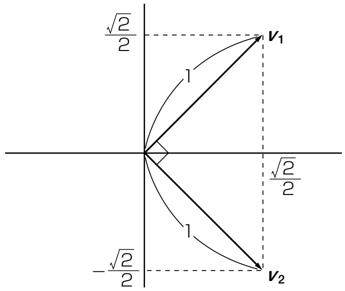

図1-17　例題3 のベクトル図示

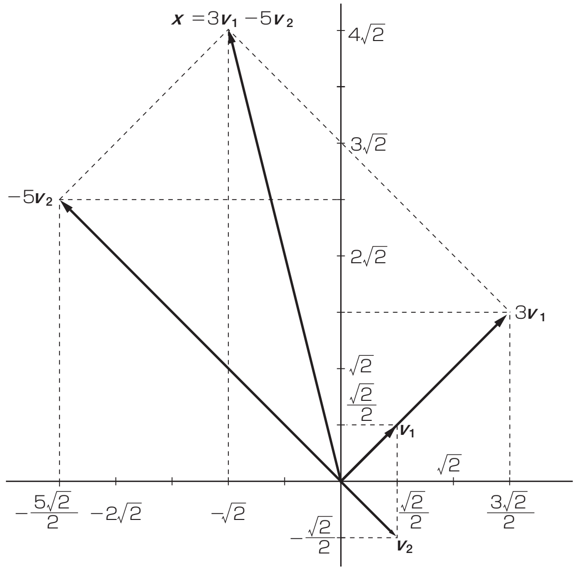

図1-18　例題4 のベクトル図示

法を知っておく必要がある．ひとまず，結果を記しておこう．

$$\begin{cases} x_1 = \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1 \rangle \\ x_2 = \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_2 \rangle \end{cases} \quad \cdots\cdots (28)$$

上式のように，係数の組 $(x_1,\ x_2)$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ とのそれぞれの内積として与えられるわけである．

例題2　式(28)を証明せよ．

解答2

まず，式(27)の両辺と $\boldsymbol{e}_1$ との内積を計算する．

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1 \rangle = \langle (x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2),\ \boldsymbol{e}_1 \rangle = \langle x_1 \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1 \rangle + \langle x_2 \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 \rangle = x_1 \langle \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1 \rangle + x_2 \langle \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 \rangle \quad \cdots\cdots (29)$$

ここで，正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ の性質，すなわち式(22)，式(25)，式(26)によって，

$$\langle \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1 \rangle = \| \boldsymbol{e}_1 \|^2 = 1,\ \langle \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2 \rangle = 0$$

であるので，式(29)の右辺で残るものは x_1 のみとなり，

$$x_1 = \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1 \rangle$$

という関係が得られるわけである．これは x_2 も同様である．

このようにして，正規直交基底の各ベクトルに対する成分は，正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ との内積を計算することにより容易に得られることがわかる．

例題3　今，二つのベクトル $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ が，

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \right),\ \boldsymbol{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

であるとき，$\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ が正規直交基底であるかどうかを調べよ．

解答3

$$\langle \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\| \boldsymbol{v}_1 \| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = 1 \qquad \| \boldsymbol{v}_2 \| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = 1$$

以上より，正規直交基底をなすことが導かれる（**図1-17**）.

例題4　例題3 の基底$\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$を用いて，$\boldsymbol{x} = (-\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})$を展開せよ.

解答4

式(28)を計算すればよい.

$$x_1 = \langle \boldsymbol{x}\ ,\ \boldsymbol{v}_1 \rangle = (-\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \qquad x_2 = \langle \boldsymbol{x}\ ,\ \boldsymbol{v}_2 \rangle = (-\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -5$$

よって，$\boldsymbol{x}$は正規直交基底$\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$を用いて，式(27)のような線形結合の形で表現すると，

$$\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{v}_1 - 5\boldsymbol{v}_2$$

となる（**図1-18**）.

第2章 正規直交基底とディジタル信号解析

第1章では，「信号数学の準備」と題して，比較的単純で，直感的に理解しやすい信号処理の例示，ディジタル信号のベクトル表現，正規直交基底などの概要を解説して，信号数学の雰囲気を体感してもらった．

本章では，正規直交基底によるディジタル信号分解，合成，相関係数，相互相関関数，自己相関関数など，今後頻繁に登場する数式の物理的な意味，数式の背景となっている考え方を中心に説明する．

まあ，ざっと読んでもらえれば，信号数学の意味するところや背景がつかめ，見た目“複雑そうな”数式も「なあ～んだ，そんなに簡単なことだったんだ」と納得できて，“目からウロコ”という感じになってもらえるのではなかろうか．

2.1 正規直交基底とは

数学的な講釈はさておき，まずはベクトル分解の基本となる正規直交基底を取り上げることにしよう．簡単な例として，4個のサンプル値からなるディジタル信号として，四つの種類を考える(**図2-1**)．ここで点線で示す波形は元のアナログ信号である．

まず，4種類のディジタル信号を4次元ベクトルで表現すると，

$$\boldsymbol{\phi}^{(0)} = \{1,\ 1,\ 1,\ 1\}$$
$$\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \{1,\ 1,\ -1,\ -1\}$$
$$\boldsymbol{\phi}^{(2)} = \{1,\ -1,\ -1,\ 1\}$$
$$\boldsymbol{\phi}^{(3)} = \{1,\ -1,\ 1,\ -1\}$$

となる．手始めに，正規直交基底であることを確かめてみることにしよう(第1章「信号数学の準備」参照)．

最初は「正規性」の確認であるが，これについては各4次元ベクトルのノルム(norm，大きさ)がすべて‘1’であればよい．一般に，N次元ベクトル$\boldsymbol{x} = \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{N-1}\}$のノルム$\|\boldsymbol{x}\|$は，次元$N$の大きさに左右されないように，