第1章

イントロダクション

Hank Zumbahlen ／訳：藤森弘己

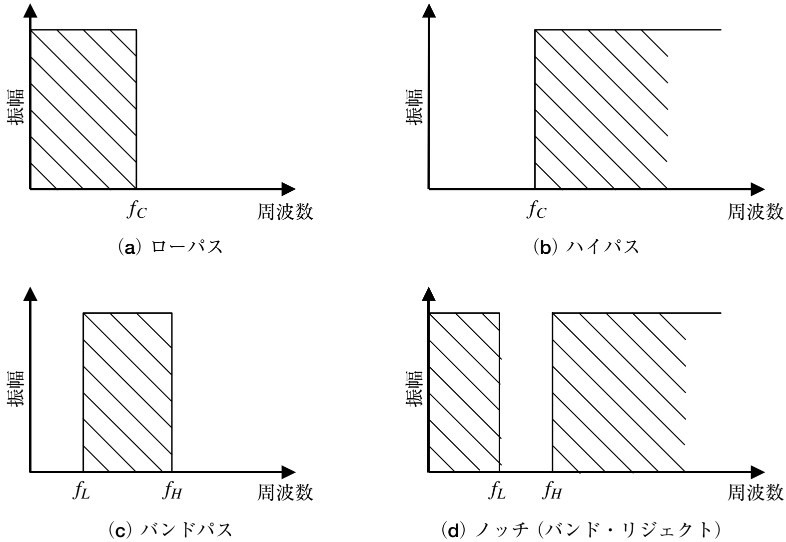
フィルタ（filter）は，信号に対して周波数に関わる処理を行うネットワークです．フィルタの基本的概念は，インダクタンス（誘導成分）やキャパシタンス（容量成分）によるインピーダンスが，周波数に応じてどのようにふるまうかを検証することにより説明できます．たとえば，シャント側が誘導性（リアクティブ素子）である分圧器を考えてみます．周波数が変わればそれに連れてリアクティブ・インピーダンスも変化し，分圧器の比率も変化します．このメカニズムは周波数変化に起因する入出力の伝達特性の変化を引き起こし，これは周波数レスポンス（周波数応答）として規定されます．

フィルタには，多くの実用上のアプリケーションがあります．たとえば，簡単なシングル・ポール（単極）のローパス・フィルタ（積分器）は，しばしばアンプの高域ロールオフ特性での位相シフトによる発振を安定化するために用いられます．また，やはりシングル・ポールのハイパス・フィルタは，ゲインの高い回路や片電源回路においてDC成分を取り除くために使用されます．

この例を無線受信機の中に見ることができ，必要とする信号帯域を通過させて増幅し，それ以外を減衰させる動作をしています．またデータ・コンバータ回路では，A-Dコンバータ・システムにおいてエイリアシング（信号の折り返し）の影響を抑えるために用いられています．あるいは，D-Aコンバータによる波形再生システムでは，広帯域の不要成分，たとえばサンプリング・クロックやその歪み成分，出力波形の平滑化などのために，フィルタが使われています．

フィルタ理論に関しては数多くの参考文献がありますが，ここでは数学的な訴求であるラプラス変換や複素数による極の計算などのもろもろのことは必要最小限にとどめることにし，深くは取り上げません．これらはフィルタの効果や，安定性の検証について説明するには適切ですが，多くの場合はその周波数領域における機能の検証のほうがよりわかりやすいものです．

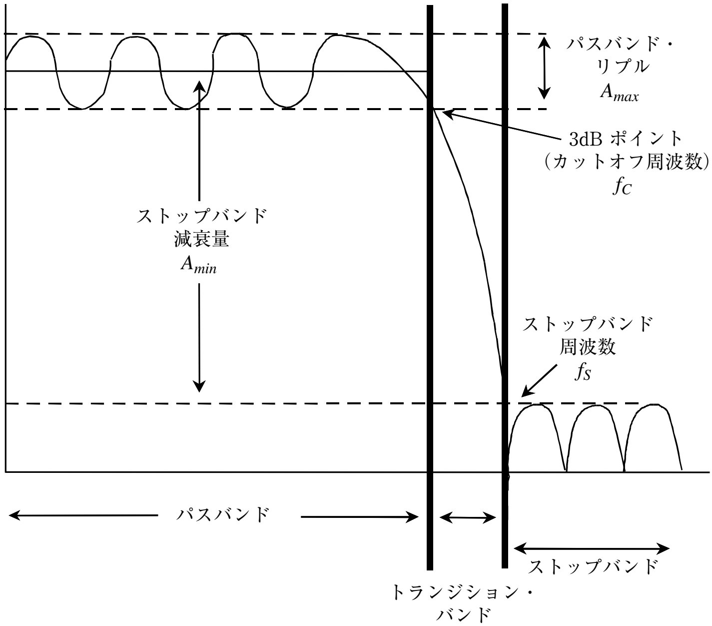
〈図 1-1〉フィルタの理想応答特性



理想的なフィルタは，注目するパスバンド（passband；通過域）における振幅方向の応答がユニティまたはある一定のゲインで，それ以外のストップバンド（stopband；阻止域）ではゼロになります．この応答が，パスバンドからストップバンドに切り替わる周波数を，カットオフ周波数（cutoff frequency；遮断周波数）と呼びます．**図 1-1**（**a**）は，理想ローパス・フィルタ（lowpass filter，LPF）の特性です．このフィルタでは，低域がパスバンドで，高域がストップバンドになっています．このローパス・フィルタと逆の特性になっているのが，ハイパス・フィルタ（highpass filter，HPF）です．**図 1-1**（**b**）がその理想特性で，低域がストップバンド，高域がパスバンドになります．

ハイパス・フィルタとローパス・フィルタが直列につながれると，それはバンドパス・フィルタ（bandpass filter，BPF）となります．バンドパス・フィルタは，低域のカットオフ周波数 f_L と高域のカットオフ周波数 f_H の間の帯域の信号を通過させます．f_L 以下の周波数帯域と，f_H 以上の帯域がストップバンドとなります．このフィルタの理想特性を**図 1-1**（**c**）に示します．このバンドパス・フィルタと相補的な特性をもつのが，バンドリジェクト・フィルタ（bandreject filter，BRF），またはバンドエリミネーション・フィルタ（bandelimination filter，BEF），あるいはノッチ・フィルタ（notch filter）と呼ばれるものです．パスバンドは，f_L 以下および f_H 以上で，ストップバンドはこの f_L と f_H の間の帯域です．**図 1-1**（**d**）に，このノッチ特性を示します．

〈図 1-2〉フィルタの主要なパラメータ



これらの図に描かれた理想フィルタ特性は，残念ながら簡単には実現できません．パスバンドとストップバンドの切り替わりは瞬間的ではなく，ある遷移領域（トランジション・バンド）が存在します．また，ストップバンドでの減衰は無限大ではありません．実際の特性を表現する4種のパラメータを**図 1-2** に示します．

カットオフ周波数（遮断周波数；f_C）は，フィルタの応答がある誤差範囲から外れる周波数，すなわちバターワース応答特性では振幅が－3 dB 低下する周波数です．ストップバンド周波数（阻止域周波数；f_S）は，応答が減衰により最小値に達する周波数です．パスバンド・リプル（通過帯域リプル；A_{max}）は，パスバンド内における応答の平坦性（リプル誤差範囲）を示します．ストップバンド最小減衰比（A_{min}）は，ストップバンド内のミニマムの信号減衰比（アッテネーション）として規定されます．

フィルタ特性の急峻さは，その次数（オーダ；M）により規定されます．この次数 M は，伝達特性関数におけるポール（pole；極）の数を表します．ポールは，伝達特性関数の分母の根です．反対に，分子側の根はゼロと呼ばれます．一つのポールは，－6 dB/oct.（周波数が 2 倍で振幅が－6 dB），あるいは－20 dB/dec.（周波数が 10 倍で振幅が－20 dB）の応答特性をもたらします．また，ゼロは＋6 db/oct.（周波数が 2 倍で振幅が＋6 dB），

あるいは＋20 dB/dec.（周波数が10倍で振幅が＋20 dB）の特性をもたらします．

ただし，すべてのフィルタがこのような特性をもつのではないことに注意してください．たとえば，ポールだけで構成された回路（オール・ポール構成，回路内にゼロがない）では，パスバンド内のリプルはありません．バターワース（Butterworth）やベッセル（Bessel）フィルタはオール・ポール構成タイプで，パスバンドでのリプルはありません．

一般的に，これらのパラメータの一つ以上は可変です．たとえば，A-Dコンバータのアンチエイリアス・フィルタを設計しようとするとき，設計者はいくつかのパラメータを想定します．どれくらいまでの信号を通すかというカットオフ周波数，一般的にはサンプリング・レートの半分であるナイキスト周波数をもとにしたストップバンド，そしてシステムのダイナミック・レンジや分解能により決まる最小減衰比などです．これらが明確になったら，数表やコンピュータの設計プログラムを参照し，そのほかのパラメータ，フィルタの次数，f_0 あるいは Q を決めます．これらのパラメータは，各セクションのピーキング特性を決め，また各セクションに使用する素子の定数を決定します．

またフィルタは，信号の振幅だけでなく，その位相にも影響を与えることに注意しなければなりません．例を挙げれば，シングル・ポール（単極）の回路セクションは，クロスオーバ周波数で90°の位相シフトを生じます．ポールが二つあれば，同じくクロスオーバ周波数で180°の位相のずれを発生します．フィルタの Q は，この位相の変化率を表します．これらについては，次章でより詳しく解説します．

第2章

フィルタの伝達関数

Hank Zumbahlen ／訳：藤森弘己

2-1 s平面

キャパシタンスやインダクタンスのインピーダンスは周波数により変化するため，フィルタはこれらを使って周波数変化に応じたレスポンス（応答）をするようになっています．そこで，これらのインピーダンスを複素数で表すと，次のようになります．

$$Z_L = sL \quad \cdots\cdots (6\text{-}1)$$

$$Z_C = \frac{1}{sC} \quad \cdots\cdots (6\text{-}2)$$

$$s = \sigma + j\omega \quad \cdots\cdots (6\text{-}3)$$

ここで，σ はネーパ周波数（Neper frequency）で，単位はネーパ/秒［Np/s］で表され，ω は角周波数で，単位はラジアン/秒［rad/s］で表されます．

標準的な回路解析手法によって，フィルタの伝達特性を表す式を求めることができます．これらのなかでは，オームの法則，キルヒホッフの電圧/電流の法則などが，複素数のインピーダンス表現形式と重ね合わせて利用されていることに注意してください．この伝達特性は，次の式のように表現されます．

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \quad \cdots\cdots (6\text{-}4)$$

ここで，関数 $H(s)$ は，実数の係数をもつ m 次の分子側級数と，同じく実数係数をもつ n 次の分母側級数との比率を表します．分母側の n は，このフィルタの次数になります．

この式の根を求めると，回路のポール（分母側）とゼロ（分子側）が求まります．ポール（pole；極）は，1個当たり－6 dB/oct.（－20 dB/dec.）の応答を与えます．その逆に，ゼロ（zero；零）は，1個当たり＋6 db/oct.（＋20 dB/dec.）の応答を与えます．これらの根は，実数あるいは複素数です．それが複素数のときは，共役の根のペアとなります．これらの根を，横軸がσ（実数軸），縦軸がω（虚数軸）のs平面（複素平面）上にプロットすることができます．根がどのようにs平面上に分布しているかということは，その回路について多くのことを教えてくれます．回路を安定に動作させるためには，プロットされる点はすべて平面の左側の象限になければなりません．もし原点にゼロが存在すれば，それは分子側にゼロ点があるということですが，そのフィルタ回路はDCでの応答がなく，ハイパスかバンドパス・フィルタです．

ここで，**図2-1**に示す*RLC*回路を考えます．最初に述べた，分圧器（voltage devider）という考えかたを用いると，図の抵抗にかかる電圧は，次のように表されます．

$$H(s) = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1} \quad \cdots\cdots (6\text{-}5)$$

回路の定数を式(6-5)に代入すると，次のようになります．

$$H(s) = 10^3 \times \frac{s}{s^2 + 10^3 s + 10^7}$$

これを因数分解し，正規化すると，次の式になります．

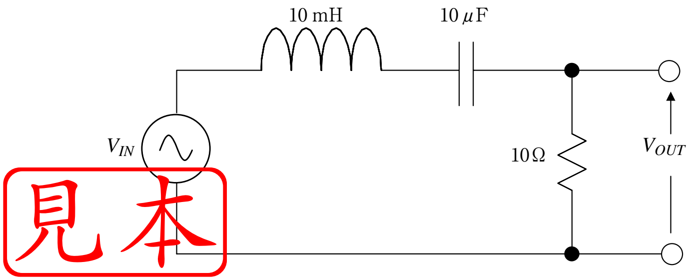
$$H(s) = 10^3 \times \frac{s}{\left[s - (-0.5 + j3.122) \times 10^3\right] \times \left[s - (-0.5 - j3.122) \times 10^3\right]}$$

この式を見ると，原点にゼロがあり，下記の1組のポールが存在することがわかります．

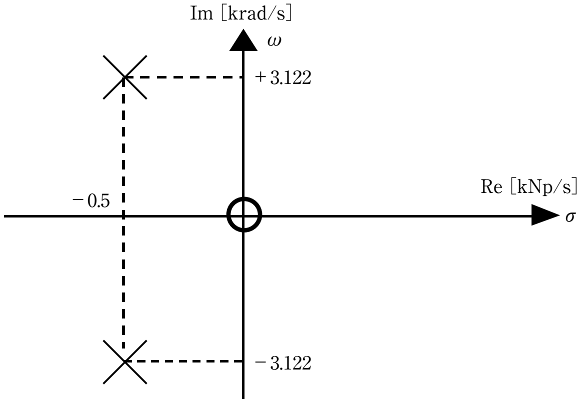
$$s = (-0.5 \pm j3.122) \times 10^3$$

この計算結果をs平面にプロットすると，**図2-2**のようになります．

〈図2-1〉*RLC*回路



〈図 2-2〉ポールとゼロの s 平面でのプロット図



ここまでは，純粋に数学的な考察です．多くの場合，工学的な関心は実際の回路でのふるまいにあります．s 平面上での検討が完全に妥当であるときは，われわれは多くの場合，ネーパや複素周波数の観点から考えることはありません．

2-2　f_0 と Q

s 平面を使った検討が適切でないというなら，先に検討したことはどのような意味をもつのでしょうか．その答えは，より実用的な二つの概念，f_0 と Q を用いた基本的な検討をすることで得られます．

●ローパス・フィルタ（lowpass filter ； LPF）

f_0 は，フィルタのカットオフ周波数（遮断周波数）です．一般的な定義では，カットオフ周波数は，応答がパスバンド（通過帯域）から 3 dB 低下する周波数とされています．場合によっては，パスバンドからの応答が落ちはじめる周波数と規定されることもあります．たとえば，0.1 dB チェビシェフ・フィルタは，その応答が 0.1 dB 以上低下する周波数を f_0 と規定しています．

減衰率の特性曲線は，カットオフ周波数を調べる場合，時間軸上の特性として規定される位相特性曲線や遅延特性曲線と同じように，実際の値よりその周波数の比率による表現が使われます．1 rad/sec でフィルタ特性を正規化したものが，設計や比較が容易なツールとして作られています．フィルタはこのなかで，カットオフ周波数によりスケーリングされ，実際の設計での定数決定が行われます．

Qはフィルタのクォリティ・ファクタです．しばしばαをもちいて，次のように表現されます．

$$\alpha = \frac{1}{Q} \quad \cdots\cdots (6\text{-}6)$$

また，ダンピング比ξは，次の式としてよく知られています．

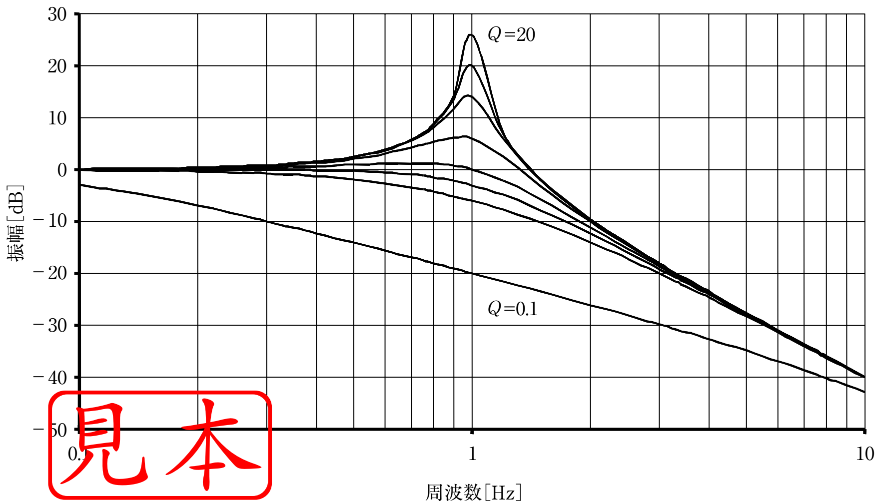
$$\xi = 2\alpha \quad \cdots\cdots (6\text{-}7)$$

もし，Qが0.707より大きければ，フィルタの応答特性に何らかのピークが生じます．Qが0.707より小さければ，f_0でのロールオフ（特性の肩の下がり）は大きく，その変化はより早めに始まり，穏やかなものになります．**図2-3**に，2ポール・ローパス・フィルタのピーキング特性とQの関係を示します．

伝達関数$H(s)$を，ω_0とQを使って書き直すと次のようになります．

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + {\omega_0}^2} \quad \cdots\cdots (6\text{-}8)$$

〈図2-3〉ローパス・フィルタのピーキングとQ



ここで，H_0 はパスバンドのゲインで，$\omega_0 = 2\pi f_0$ です．

これがフィルタ設計に用いられるローパス・フィルタのプロトタイプ・モデルです．

●ハイパス・フィルタ（highpass filter ；HPF）

ローパス・フィルタのプロトタイプ・モデルの伝達関数 $H(s)$ の分子である H_0 を $H_0 s^2$ に変更すると，ハイパス・フィルタにすることができます．ハイパス・フィルタの応答は，周波数軸を逆向きにするとローパス・フィルタの形とそっくりです．

ハイパス・フィルタの伝達関数は次のとおりです．

$$H(s) = \frac{H_0 s^2}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0{}^2} \quad \cdots\cdots (6\text{-}9)$$

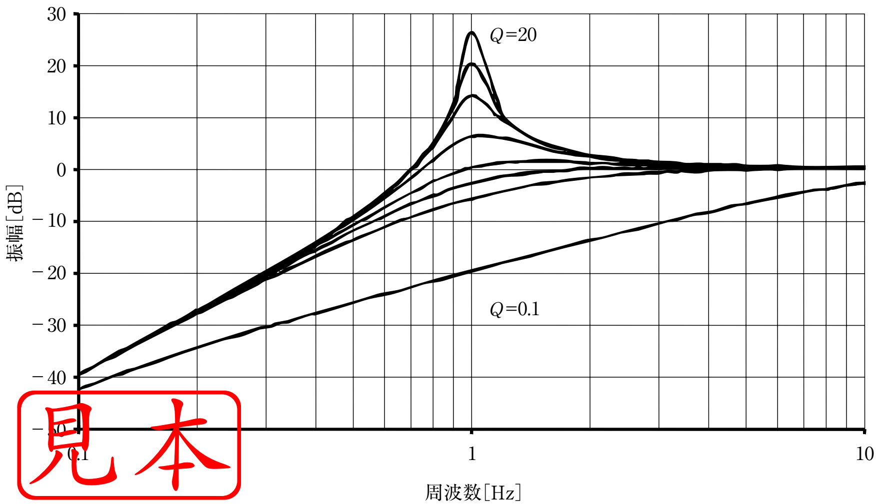
2ポールのハイパス・フィルタの周波数特性のプロットを**図 2-4** に示します．

●バンドパス・フィルタ（bandpass filter ；BPF）

ローパス・フィルタの伝達関数の分子部分を $H_0\omega_0{}^2$ に変えると，この式はバンドパス・フィルタを表すようになります．

バンドパス・フィルタの伝達関数を以下に示します．

〈図 2-4〉ハイパス・フィルタのピーキングと Q



$$H(s) = \frac{H_0 {\omega_0}^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + {\omega_0}^2} \quad \cdots\cdots (6\text{-}10)$$

ω_0 は，このフィルタのピーク・ゲイン周波数（$f_0 = 2\pi\omega_0$）です．また，H_0 は回路ゲインで，次のように規定されます．

$$H_0 = \frac{H}{Q} \quad \cdots\cdots (6\text{-}11)$$

バンドパス・フィルタにおいては，Q は特別な意味をもちます．これはフィルタの設計に応じて選ぶことができ，次のように規定されます．

$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L} \quad \cdots\cdots (6\text{-}12)$$

ここで f_H と f_L は，応答が最大値から 3 dB 低下する周波数を表します．フィルタの帯域幅（BW）は，次のように表されます．

$$BW = f_H - f_L \quad \cdots\cdots (6\text{-}13)$$

共振周波数（f_0）は，f_H と f_L の値から幾何的に求められ，この二つの周波数の中間の位置になりますが，この軸は対数表示であることに注意してください．

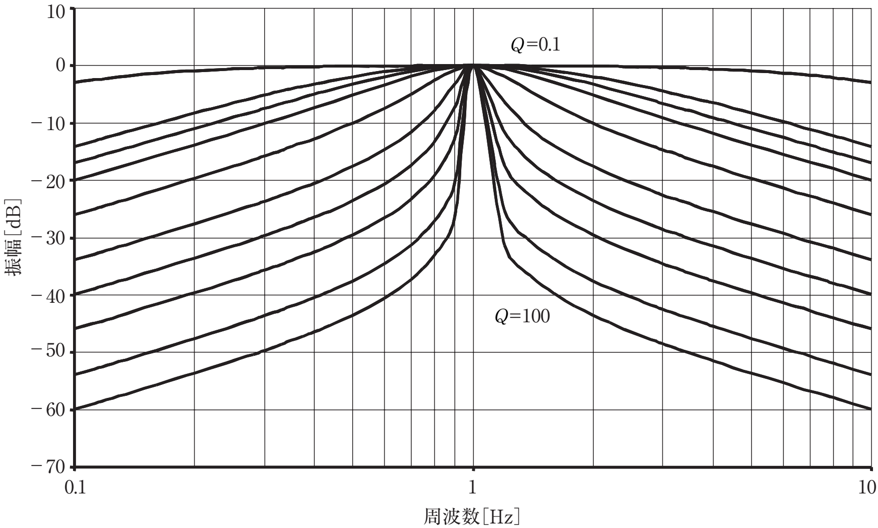
$$f_0 = \sqrt{f_H f_L} \quad \cdots\cdots (6\text{-}14)$$

バンドパス・フィルタの応答特性の裾は，対数周波数軸でプロットすると f_0 を中心にして左右対称になります．**図 2-5** に Q の値を変化させたときの応答特性を示します．

ここでひとつ注意すべきことがあります．バンドパス・フィルタの実現には，二つの考えかたがあります．一つは，上に解説したような狭帯域で考える古典的な形です．

しかしながら，高域と低域のカットオフ周波数が広く離れている場合，バンドパス・フィルタは別個のハイパス・フィルタとローパス・フィルタを組み合わせて構成されます．ここで，周波数が広く離れているという意味は，少なくとも 2 オクターブ以上の帯域（周波数で 4 倍以上）がある場合です．これが広帯域のケースです．

〈図 2-5〉バンドパス・フィルタのピーキングと Q



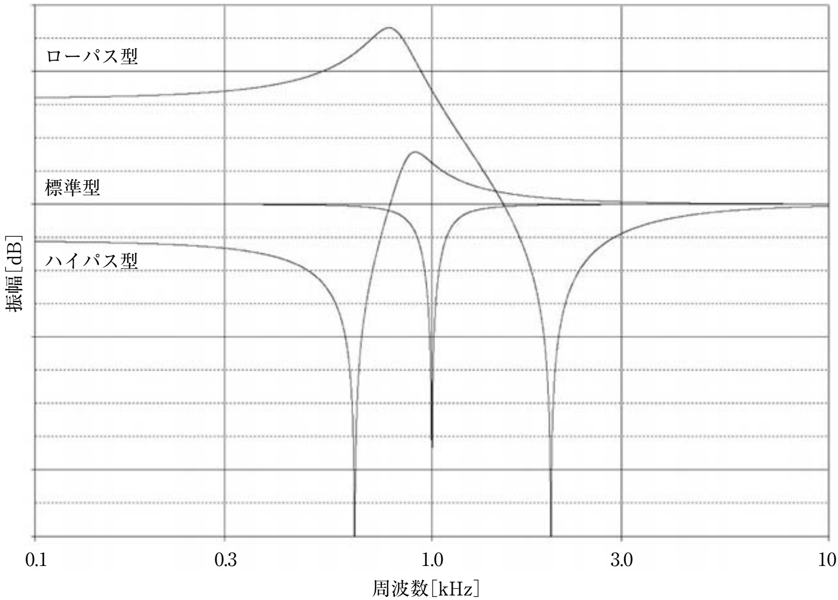
●バンドリジェクト・フィルタ（bandreject filter ； BRF）/ノッチ・フィルタ（notch filter）

伝達関数の分子部分の係数を $s^2 + \omega_Z^2$ に置き換えると，バンドリジェクト・フィルタ（ノッチ・フィルタ）と呼ばれる特性になります*1．バンドパス・フィルタの場合と同じように，もしバンドリジェクト・フィルタの二つのコーナ周波数が1オクターブ以上離れているとき（広帯域のケース）は，この特性はローパス・フィルタとハイパス・フィルタの二つのセクションにより構成されます．したがって，ここでは次のような取り決めにより二つのケースを区別します．狭帯域のケースをノッチ・フィルタと呼び，広帯域の場合をバンドリジェクト・フィルタとします．ノッチ・フィルタ（バンドリジェクト・フィルタ）の伝達関数は次のとおりです．

$$H(s) = \frac{H_0\left(s^2 + \omega_Z{}^2\right)}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0{}^2} \quad \cdots\cdots (6\text{-}15)$$

＊1：【訳注】バンド・エリミネーション・フィルタ（band-elimination filter ； BEF）と呼ばれることもある．

〈図 2-6〉標準型，ローパス型，ハイパス型のノッチ特性



ノッチ・フィルタの特性は，**図 2-6** に示すように，3 種類のケースが考えられます．ポール周波数ω_0とゼロ周波数ω_Zの関係により，このフィルタの特性が標準的なノッチか，ローパス・ノッチあるいはハイパス・ノッチかが決まります．

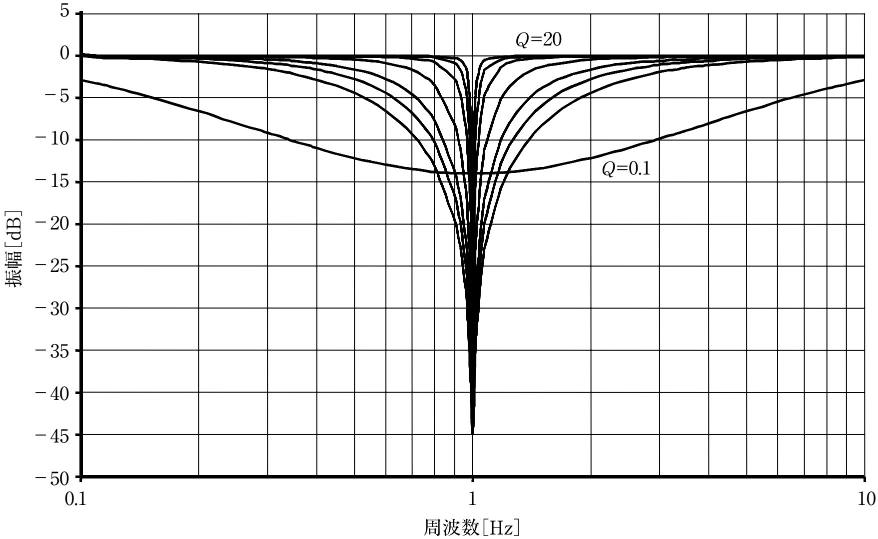
ゼロ周波数がポール周波数と同じであれば，これは伝達特性が左右対称な標準ノッチ・フィルタとなります．この状態では，ゼロは$j\omega$平面上のポール周波数を規定する曲線が軸と交差する点に存在します．

ゼロ周波数がポール周波数より高い場合，この特性はローパス・ノッチになります．このときω_0は，ポール周波数を表す曲線の外側に存在します．これから理解できることは，このフィルタの応答は，ω_Zより下の周波数ではω_Zより上の周波数より振幅が大きくなるということです．この特性を，エリプティカル・ローパス・フィルタとも呼びます．

ゼロ周波数がポール周波数より低い場合，ハイパス・ノッチ・フィルタ特性が得られます．このときω_Zは，ポール周波数の曲線の内側に存在します．これから理解できることは，このフィルタの応答は，ω_Zより下の周波数ではω_Zより上の周波数より振幅が小さくなるということです．この特性を，エリプティカル・ハイパス・フィルタとも呼びます．

ノッチ帯域幅とQの関係を**図 2-7** に示します．

〈図 2-7〉Qの違いによるノッチ・フィルタの幅と周波数の関係



●オールパス・フィルタ（allpass filter ；APF）

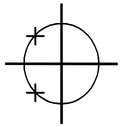
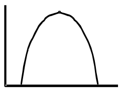
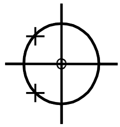
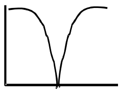
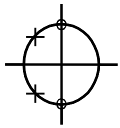
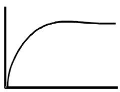
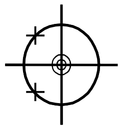
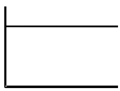
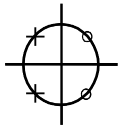
以上のほかに，信号の振幅には影響を与えず，その位相をシフトするためのフィルタがあります．このタイプのフィルタをオールパス・フィルタと呼び，その目的は回路の応答のなかで位相のシフト（ディレイ）を与えるものです．オールパス・フィルタの振幅方向の応答は，帯域すべてに渡ってユニティ・ゲイン応答です．しかし位相の応答特性は，周波数を0から無限大までスイープしたとき，0°から360°まで変化します．オールパス・フィルタの目的は，周波数イコライジング（周波数等化回路）がおもなもので，パルス回路などに使用されます．また，この回路は抑圧搬送波単側波帯（single side band，suppressed carrier ；SSB-SC）の変調回路にも用いられます．このフィルタの伝達関数は次のとおりです．

$$H(s) = \frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + {\omega_0}^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + {\omega_0}^2} \qquad \cdots\cdots (6\text{-}16)$$

オールパス・フィルタの伝達特性は，次のように合成して表すことができます．

$$H_{AP} = H_{LP} - H_{BP} + H_{HP} = 1 - 2H_{BP} \qquad \cdots\cdots (6\text{-}17)$$

〈図 2-8〉標準的な２次フィルタの応答特性

タイプ	振幅	ポール位置	伝達関数
ローパス			$\dfrac{\omega_0{}^2}{s^2+\dfrac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}$
バンドパス			$\dfrac{\dfrac{\omega_0}{Q}s}{s^2+\dfrac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}$
ノッチ（バンド・リジェクト）			$\dfrac{s^2+\omega_z{}^2}{s^2+\dfrac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}$
ハイパス			$\dfrac{s^2}{s^2+\dfrac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}$
オールパス			$\dfrac{s^2-\dfrac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}{s^2+\dfrac{\omega_0}{Q}s+\omega_0{}^2}$

比較のため，**図 2-8** にそれぞれのフィルタの応答特性と伝達関数をまとめて示しておきます．

2-3　位相の応答特性

先にも述べたように，フィルタは信号の振幅（amplitude）とともに，位相（phase）にも変化を与えます．このことがどのような違いを生み出すのでしょうか．フーリエ解析によれば方形波は，基本波とその奇数次高調波成分から成り立っています．これらの高調波の振幅と位相の応答は，精密に規定することができます．もし振幅や位相の関係が変化すれば，これらの成分を集合加算しても，もとの方形波を再現することはできません．その波

形は歪んで，オーバーシュートの発生やライズ・タイム（あるいはフォール・タイム）の低下という結果をもたらします．この現象は，より複雑な信号波形でも起こります．

フィルタのポールは，ひとつあたりのコーナ周波数において45°の位相シフトを加えます．位相は0°（コーナ周波数より十分に低い領域）から90°（コーナ周波数より十分に高い領域）まで変化します．この変化が現れるのは，周波数が10倍くらい離れたところからです．マルチポール・フィルタ（多極フィルタ）では，それぞれのポールが位相シフトを発生させるため，全体のシフトはこれらの合計になります．たとえば，2ポール・フィルタでは最大180°，3ポール・フィルタでは270°になります．

シングルポール（単極）のローパス・フィルタの位相応答特性を以下に示します．

$$\phi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0} \qquad \cdots\cdots (6\text{-}18)$$

このローパス・フィルタのポールのペア（共役根）での位相応答は，次のとおりです．

$$\begin{aligned}\phi(\omega) = &-\arctan\left[\frac{1}{\alpha}\left(2\frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{4-\alpha^2}\right)\right] \\ &-\arctan\left[\frac{1}{\alpha}\left(2\frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{4-\alpha^2}\right)\right]\end{aligned} \qquad \cdots\cdots (6\text{-}19)$$

また，シングルポール・ハイパス・フィルタの場合は，位相応答が次のようになります．

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{\omega_0} \qquad \cdots\cdots (6\text{-}20)$$

同じように，ハイパス・フィルタのポール・ペアでの位相応答を下記に示します．

$$\begin{aligned}\phi(\omega) = \pi &-\arctan\left[\frac{1}{\alpha}\left(2\frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{4-\alpha^2}\right)\right] \\ &-\arctan\left[\frac{1}{\alpha}\left(2\frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{4-\alpha^2}\right)\right]\end{aligned} \qquad \cdots\cdots (6\text{-}21)$$

バンドパス・フィルタの場合の位相応答は，次のとおりです．

$$\begin{aligned}\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} &-\arctan\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{2Q\omega}{\omega_0} + \sqrt{4Q^2-1}\right)\right] \\ &-\arctan\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{2Q\omega}{\omega_0} - \sqrt{4Q^2-1}\right)\right]\end{aligned} \qquad \cdots\cdots (6\text{-}22)$$