

ディジタル信号処理とは

1.1 ディジタル信号処理とは何か

半導体技術の急速な発達により、コンピュータを取り巻く環境も、マルチメディアの時代からインターネット時代を経て、現在はユビキタス・コンピューティング (ubiquitous computing)の時代を迎えようとしている。ディジタル信号処理 (digital signal processing) は、このような技術を支える基盤技術の一つとして重要な役割を担っており、現代社会において、なくてはならない技術である。

ところで、私たちの身のまわりの物理現象から発生する情報の多くは、アナログ信号の形で伝えられる。たとえば、私たちが日常的に使っている音声はいろいろな情報をもっているが、音声はマイクを通して電圧値に変換され、時間とともに変化するアナログの電気信号になる。このようなアナログの信号を、コンピュータをはじめとするディジタル処理を行う装置で扱うための技術がディジタル信号処理である。

もう少し具体的な例で考えてみよう。図1-1には、ゲルマニウム・ラジオの回路図と各ブロックの機能を示している。このシステムではアナログ信号をアナログ的に処理しているので、アナログ信号処理システムの一例ということができる。このシステムと同じような機能をもつシステムをディジタル的に行う算術演算、論理演算、条件判断などの操作で実現するのがディジタル信号処理ということになる。

ディジタル信号処理では**図1-1**のシステムと同じような機能をもつシステムをどのようにして実現するのかを見てみよう.ディジタル信号処理の実現手段は大きく分けてソフトウェアつまりプログラムとして実現する場合と、ハードウェアで実現する場合がある.ここでは、ソフトウェアで実現するものとすると、各ブロックでの処理は、たとえば**表1-1**^{注1}に示すように書くことができる.

: 実元図1-1のシステム全体と同じような働きのシステムを実現するためには、表1-1に示すもの以外にA-D変換やD-A変換などの処理が必要になるが、ここでは省略している.

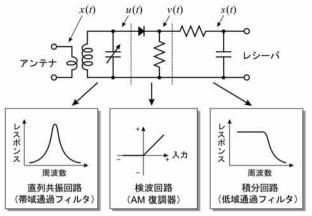


図1-1 ゲルマニウム・ラジオにおける信号処理のようす

表1-1 ゲルマニウム・ラジオをディジタル信号処理で実現する(プログラムで実現する場合)

機能	差分方程式	C 言語
帯域通過フィルタ	$u[n] = \sum_{m=1}^{M_1} a_m u[n-m] + \sum_{k=0}^{K_1} b_k x[n-k]$	<pre>for (m=1; m<=M1; m++) u[n] += a[m]*u[n+m]; for (k=0; k<=K1; k++) u[n] += b[k]*x[n+k];</pre>
AM 復調器	$v[n] = \begin{cases} u[n], & u[n] \ge 0 \\ 0, & u[n] < 0 \end{cases}$	if (u[n]>=0) v[n] = u[n]; else v[n] = 0;
低域通過フィルタ	$s[n] = \sum_{m=1}^{M_2} g_m s[n-m] + \sum_{k=0}^{K_2} h_k v[n-k]$	for (m=1; m<=M2; m++) s[n] += g[m]*s[n+m]; for (k=0; k<=K2; k++) s[n] += h[k]*v[n+k];

差分方程式で使われているx[n]などは $\mathbf{21-1}$ のx(t)などを標本化した値を表す.

表1-1では、2列目に差分方程式というものが出てくるが、この式がディジタル信号処理における処理方法を表す式であり、このような計算を行うのがディジタル信号処理である。この差分方程式については第3章で説明する。なお、表1-1の差分方程式の中で出てくるx[n]、u[n]などは、図1-1でx(t)、u(t)などのアナログ信号を標本化したものに対応する。標本化については第2章で説明する。第3列目には、各ブロックの処理に対応する差分方程式に基づいて、C言語を使って記述した例を示す。ここで、ディジタル信号処理はアナログ信号処理の近似ではないということに注意しなければならない。図1-1で直列共振回路や積分回路の動作は微分方程式を使って記述できるが、表1-1の差分方程式はこの微分方程式の単なる近似ないしはシミュレーションのためのものではない。たとえば、ロ列共振回路は帯域通過フィルタ^{注2}として働くが、この電気回路で実現される周波数特性と差分方性式で実現される周波数特性は同じである必要はない。差分方程式に求められるのは、ただ単に帯

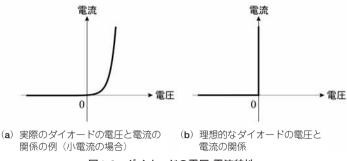


図1-2 ダイオードの電圧-電流特性

域通過フィルタとしての機能を実現することであり、この電気回路の周波数特性とできるだけ同じ特性が実現されることが求められているわけではない。また、図1-1の検波回路にはダイオードが使われているが、このダイオードの典型的な電圧―電流特性は図1-2(a)のようになる。したがって、図1-1の検波回路の働きをできるだけ忠実に差分方程式を使って記述しようとすると、表1-1に示す式よりももっと複雑な式になってしまう。しかし、実際にダイオードの特性として求められるのは図1-2(b)の特性であり、表1-1に示す検波回路のブロックに対応する差分方程式は、この図1-2(b)の特性を実現したものになっている。この例からも、ディジタル信号処理は、アナログ電気回路で行う処理の近似やシミュレーションでないことがわかるであろう。

ところで信号にもいろいろあるが、図1-1のシステムで扱っている信号は時間信号である。時間信号は、もっとも簡単な場合、時間を変数とする1次元の関数として表現される。信号にはこのような1次元の時間信号のほかに、静止画像のように時間ではなく位置を変数とする2次元の関数として表現される信号や、動画像のように2次元の関数が時間とともに変化する、つまり三つの変数をもつ3次元関数として表現されるものもある。本書ではそのような信号は扱わず、1次元の時間信号^{注3}に限定する。しかし、1次元の時間信号についての取り扱いをしっかり身に付けていれば、それ以外の信号の取り扱いも比較的簡単に理解することができる。

話はかわるが、「ディジタル信号処理」という言葉は専門的な用語としてすでに定着している言葉だが、その内容が誤解されている場合もときどき見られる。つまり、この言葉はどこで区切るかによって意味が違ってくる。「ディジタル信号 | 処理」のように区切るとディジタル信号を扱う処理という意味になるので、論理回路やコンピュータを含む非常に広い内容になってしまう。それに対して「ディジタル | 信号処理」のように区切れば、信号処理をディジタル的な手段で行うという意味になり、専門用語としてもこの意味で使われている。この場合、対象となる信号は主としてアナロ

注2:ある範囲の周波数成分のみを通過させる働きをもったフィルタ.

注3:時間信号に限定するということは本質的なことではないが、限定しない場合に用語が煩雑になる。たとえば時間信号に対して て周波数ということばがあるが、変数が位置に対応するような信号に対しては空間周波数という用語になる。このように変 数すでは する量が変化すると、それに対応して用語も変える必要があるので、時間信号に限定しない場合、記述が煩雑になっ このように変

グ信号になる、本書で扱うのは、もちろん「ディジタル」信号処理」である。

ディジタル信号処理に関する文献は数多く出版されているためここでは示さないが、本書をひととおり読んだ後でもっと本格的に学びたいという読者のために一つだけ挙げるとすると、A. V. Oppenheim と R. W. Schafer の "Discrete-time Signal Processing" が非常に役に立つものと思われる.

1.2 ディジタル信号処理の応用分野

ディジタル信号処理技術は、**図1-3**に示すように、通信をはじめ、音響、音声、画像、計測、制御などの広い分野のシステムを実現するうえで、共通の基盤技術の中でも重要なものの一つということができる。私たちに身近なところでも、携帯電話をはじめとしてディジタル信号処理を応用した製品がたくさん出回っている。

そのようなものの例として、ハンズフリー(handsfree)電話機の中でディジタル信号処理がどのように使われているか見てみよう。図1-4に、ハンズフリー電話機による通話系の模式図²⁾を示す。このような電話を使って通話するときのことを考えてみよう。

送話者の声はマイク1で拾われ増幅されて受話者のスピーカから再生される。ハンズフリーの電話機では、スピーカ2と受話者の距離が離れている場合が多いので、スピーカからはある程度大きな音が出力される。そのため、何も処理を施さなければ、この音がマイク2で拾われ、それが増幅されて送話者側のスピーカ1へ送られ、送話者の声が再生される。送話者側もハンズフリー電話機を使っているとすると、スピーカ1から出た送話者の声が再び増幅されスピーカ2で再生されるという繰り返しになるので、音響エコーを生じて通話の品質を落とすことになる。また、条件によっ

<音声信号処理> <通信> <音響信号処理> モデム 音響信号情報圧縮 (MP3等) 音声分析 音声合成 符号化 音場制御 エコー・キャンセラ 音声認識 電子楽器 自動等化 アクティブ騒音制御 音声情報圧縮 スペクトル拡散通信 適応形マイク・アレイ テキスト-音声変換 <画像処理> <計測システム> <制御> 画像情報圧縮 (JPEG, MPEG) センサ信号処理 モータ制御 ハードディスク制御 画像強調 振動解析 ロックイン・アンプ 画像復元 ロボット 画像認識 相関関数 アクティブ振動制御 高速フーリエ変換 (FFT) <自動車> <医用システム> <天文学, 地球探査> エンジン制御 CT VLBI (超長基線干渉計) アクティブ・サスペンション 脳波解析 合成開口電波望遠鏡 アンチロック・ブレーキ 心電図解析 開口合成レーダ カー・オーディオの音場制御 血流計測 地震波解析 X線写真等の自動診断



図1-3 ディジタル信号処理の応用分野

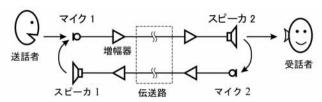


図1-4 ハンズ・フリー電話機による通信系の模式図

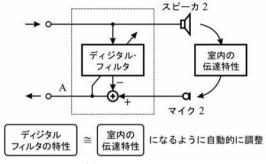


図1-5 音響エコー・キャンセラの原理

てはハウリング(howling)を生じ、使い物にならない場合も出てくる.

そこで、このようなハンズフリー電話機にはディジタル信号処理技術の一つである適応フィルタを使って、音響エコーをキャンセルしハウリングを生じさせない工夫がなされている。そのためのシステムが音響エコー・キャンセラで、その原理の概略を**図1-5**に示す。

この図のディジタル・フィルタは特性を変えられるようになっており、この特性を室内の伝達特性に一致するように調整すれば、ディジタル・フィルタの出力信号とマイク2で拾う信号は同じものになる。したがって、図のようにマイク2で拾った信号からディジタル・フィルタの出力信号を引き算すれば、マイク2で拾った音を打ち消すことができる。その結果、送話者の声がまた送話者側へ戻るということを防ぐことができる。

実際には、室内の伝達特性は状況に応じて変化するので、事前にディジタル・フィルタの特性を調整しておくことはできない。そこで、このディジタル・フィルタの特性を、人手を介することなく、適応アルゴリズムによって自動的に調整し、図のA点に現れる信号がもっとも小さくなるようにする。これが、音響エコー・キャンセラの基本的な考え方になる。

1.3 なぜディジタル信号処理か

1.2では、ディジタル信号処理がいろいろな分野で応用されていることを説明してきた、それでは、 し、ディジタル信号処理が使われるようになってきたのかというと、いろいろと利点が多いからで し、ディジタル信号処理には利点とともに欠点がある。そのため、ディジタル信号処理

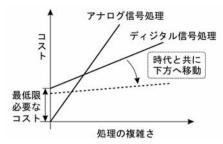


図1-6 アナログ信号処理とディジタル信号処理のコストの比較

を使う場合は、その長所と短所をしっかりと把握しておく必要がある.

次に,アナログ電子回路などを使って行われるアナログ信号処理と比較した場合の,ディジタル信号処理の長所と短所を示す.

<長所>

- (1) ディジタル信号処理では、計算機のプログラムとして表現できる処理は、原理的にどんなものであっても実現できる。そのため、アナログ信号処理が得意としない非線形の処理^{注4}や適応的な処理が容易に実現できる。
- (2) 情報圧縮,誤り訂正,暗号化などの他のディジタル処理と協調して働かせることが簡単なので,データの蓄積,伝送などにとっても非常に都合がよく,いろいろな付加価値も期待できる.
- (3) データを表現するためのビット長を増やせば増やすほど高精度化が簡単に実現できる.
- (4) 温度、湿度などによる変化や経年変化がまったくないので、安定した品質が実現できる、
- (5) LSI化が可能なので、小型化、経済化、高信頼化、低電力化を達成することができる。
- (6) ディジタル信号処理は多くの場合,ディジタル信号処理専用のプロセッサである DSP (Digital Signal Processor) のプログラムとして実現されるので、そのような場合にはシステムの仕様の変更などに柔軟に対応できる。

<短所>

- (1) アナログ信号をリアルタイムで処理する場合,一つの入力サンプルに対する処理は、基本的に次のサンプルが入力されるまでに完了させなければならない。そのため、あまり高い周波数の信号は扱えない。
- (2) データや演算の際のビット長が十分に確保できない場合には、その誤差の対策を考えなければならないこともある.
- (3) 簡単な処理の場合でも、ディジタル的な処理を行う部分のほかに A-D 変換器、D-A 変換器、その 他の周辺回路が必要になるため、小規模でしかも単体のディジタル信号処理システムを考えた場 合に、コストや回路規模の点で不利になる場合もある。そのようすをおおまかに図1-6に示す。



での処理にはいろいろなものがあるが、信号同士の乗算がその代表的なものである。たとえば、変調や復調の処理を行場合に、信号同士の乗算を使う場合がある。

以上のように、ディジタル信号処理にはいくつかの欠点がある。(1)については、リアルタイム処理を行うものと仮定すると、現在のところ数MHz程度の帯域の信号、たとえば動画像のリアルタイム処理程度であれば十分扱うことができる。しかし、GHz程度の周波数になると、アナログ信号処理の独壇場になってしまう。(2)の誤差に関しては、半導体技術の発達のおかげで、ビット長の十分に長いものを簡単に利用できるようになっている。そのため、誤差に関する問題は、それほど大きな問題ではなくなりつつある。(3)に関してはこれも半導体技術の発達のおかげで、A-D/D-A変換器や周辺回路を1チップ化することが容易になっているので、あまり大きな問題にはならない。また、最近のディジタル機器は、たとえばディジタル・カメラ付携帯電話のように複合化される傾向にあり、単体として実現する場合には経済的に不利であっても複合化されることで、総体としてみたときにはそれほどコスト的に不利にはならないケースも多い。

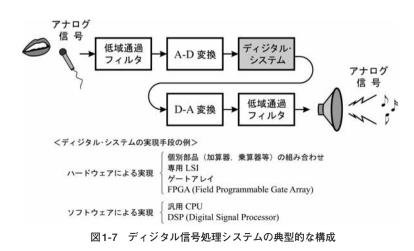
したがって、ここであげたディジタル信号処理の短所も、しだいに短所ではなくなりつつあるといってよい。

1.4 ディジタル信号処理システムとDSP

図1-7に、典型的なディジタル信号処理システムの構成を示す。この図の個々のブロックの役割については第2章で説明する。この中で、ディジタル・システムの部分が中心的な役割を果たしている。ディジタル信号処理というと、このディジタル・システムの中で行われる、計算をはじめとする各種ディジタル的な処理を指す。

ディジタル・システムの部分を実現するには、**図1-7**に示すように、大きく分けてハードウェアによる方法、つまり布線論理(wired logic)で実現する方法と、ソフトウェアによる方法、つまりプログラム論理(program logic)で実現する方法がある。

ディジタル信号処理における処理の多くは算術的演算で、とくに加算、乗算が中心になる。一方、



マイクロプロセッサは1970年代の初めに現れたが、その当時のマイクロプロセッサは算術演算能力、とくに乗算の能力が劣っていた。そのため、1980年代以前に、リアルタイムで働くディジタル信号処理システムを実現しようとすると、どうしても個別の加算器や乗算器などを組み合わせた布線論理として実現する必要があった。したがって、コスト的にも高価になり、またシステムの仕様が変更されるたびにハードウェアの設計をやり直さなければならないため、ディジタル信号処理の利用はごく限られた範囲にとどまっていた。

しかし、1980年代に入るとVLSI技術の驚異的な発達のおかげで、非常に高速なストアド・プログラム型のプロセッサが1チップで実現できるようになり、DSP(Digital Signal Processor)と呼ばれるディジタル信号処理専用のマイクロプロセッサも登場した。そのおかげで、プログラム論理であってもリアルタイム処理が可能となった。ところで、DSPはマイクロプロセッサの一種なので、行わせる処理はプログラムによって記述する。そのため、布線論理として実現されていたそれまでのディジタル信号処理システムに比べ、非常に柔軟なシステムを比較的簡単に作ることができるようになった。

今日使われている,ディジタル信号処理を応用する機器にはDSPが組み込まれているものが多い.したがって,ディジタル信号処理の応用分野が飛躍的に拡大したのは,DSPが登場したおかげだといっても過言ではない.なお,本書ではDSPについては取り上げないので,興味ある読者は拙著3などを参照していただきたい.

ところで、処理速度が要求される場合は、どうしてもハードウェアによる処理に頼らざるを得ない場合も出てくる。そのような場合、とくに大量に使われるような処理では、専用のLSIでディジタル・システムの部分を実現する場合もある。また、ゲートアレイやFPGAを使えば、それほど大量に使われなくても、あまり高コストにならずに実現ができる場合もある。

つまり、現在リアルタイム処理を行うようなディジタル信号処理システムを実現する場合、DSP、専用LSI、ゲートアレイ、FPGAが主として使われ、処理速度や処理の複雑さにより住み分けがなされている。専用処理速度がそれほど要求されないが、処理がある程度複雑な場合はDSPが使われる傾向にある。逆に、処理はそれほど複雑ではないが、処理速度が要求されるような場合には、専用LSI、ゲートアレイ、FPGAが使われる傾向にある。また、リアルタイム処理が要求されない場合は、汎用のCPUでディジタル信号処理を行う場合も多い 125 .

1.5 簡単なディジタル・フィルタ — 移動平均 —

ディジタル信号処理の中でも中心的な役割を担っているのがディジタル・フィルタである. ディジタル・フィルタという言葉を初めて聞くと、何か非常に高度な最先端の難しい処理を行っているように思うかもしれないが、じつはそれほど高度でも難しいことでもない. とくに、ディジタル・フィル

:最近では汎用のCPUでも演算能力が非常に高くなっているので、パソコンのCPUでもある程度のディジタル信号処理はリアルタインで実行できるようになっている。

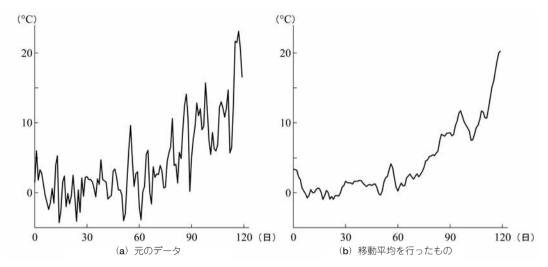
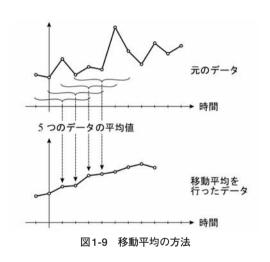


図1-8 札幌市の1997年1月1日~4月30日における1日ごとの最高気温の変化



タの処理を行っているという意識がなくてもディジタル·フィルタと等価な処理を行っている場合がある。そこで、次にそのような実例を示す。

図1-8(a)には札幌市の1997年1月1日~4月30日における,1日ごとの最高気温¹⁶の変化を表したものを示す。このグラフでは日ごとのバラツキが大きいため全体の傾向はつかみにくくなっている。そこで,グラフをもっと滑らかにすることを考える。このときよく使われるのが移動平均(moving average)で,図1-8(b)には元のデータの移動平均を計算したものを示す。このグラフからは全体の傾向がよくわかる。つまり,1,2月は低めで,3月から上昇傾向にあり,その期間では8日前後の周



」掲載されたデータを利用して作成.

期があるように見える.

ここで使われている移動平均のようすを**図1-9**に示す. **図1-8**(b)のデータを得るために、このように平均の計算で使う5個のデータを一つずつずらしながら、5点のデータの平均を計算していった。

この移動平均は、従来から統計的な処理の中で、時系列データの変化の傾向を読み取る場合によく使われる初歩的な処理であるが、この移動平均の処理がまさにディジタル・フィルタそのものである。移動平均を行うと、図1-9からもわかるように、データの変動が比較的滑らかになる。このデータの変動を時間信号の波形とみなすと、波形が滑らかだということは、その信号に高い周波数成分があまり含まれていないということができる。したがって、移動平均は一種の低域通過フィルタ (lowpass filter)、つまり高い周波数成分は通しにくく、低い周波数成分はよく通すようなフィルタであるということができる。移動平均が低域通過フィルタと等価であることは、第3章の中で説明する。

参考文献

- 1) A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, with J. R. Buck; Discrete-time signal processing, 2nd Ed., Prentice-Hall. 1998.
- 2) 大賀寿郎, 山崎芳男, 金田豊;音響システムとディジタル処理, p.209, 電子情報通信学会, 1995年,
- 3) 三上直樹; C言語によるディジタル信号処理入門, CQ出版社, 2002年.





アナログ信号から ディジタル信号へ

2.1 ディジタル信号処理システムと信号

第1章で説明したように、ディジタル信号処理では基本的に、アナログ信号に対してディジタル的な手段により処理を行う。そのためのシステムの基本的な構成は第1章でも示したが、もう少し詳しく示すと図2-1のようになる。この図には、各部分での信号のイメージもいっしょに示した。ディジタル信号処理とは、この図の中で「ディジタル・システム」と書かれているブロックの中で行う処理である。

ところで、ディジタル信号処理を行うためには、図2-1からわかるように、まずアナログ信号をディジタル・システムで扱えるような形に変換する必要がある。このとき注意しなければならない点については、この章で説明する。また、処理した結果は再びアナログ信号に戻す場合が多い。このときにも注意すべき点はあるが、それについては第7章7.1節(b)アパーチャ効果とその対策のところで説明する。

2.2 アナログ信号の標本化と量子化

ディジタル信号処理システムでは,アナログ信号 $^{\pm 1}$ は最初に一定の間隔T(これを標本化間隔という)ごとに標本化(sampling)されて離散的信号(discrete signal)に変換される.次に,A-D変換器により量子化(quantization),つまり数値化されてディジタル信号(digital signal)になり,ディジタル・システムに入力される.そのようすを図2-2に示す.

ディジタル・システムが実際に扱うのは、図2-2(c)の状態のディジタル信号になる.しかし、ディジタル信号処理システムでは、一般に A-D変換器のビット長を十分にとる場合が多いので、その場合には図2-2(c)に示す量子化幅 Δ は十分狭くなる.したがって、ディジタル信号処理の理論の展開



離散的信号と対比して、アナログ信号を連続信号(continuous signal)と呼ぶ場合もある。

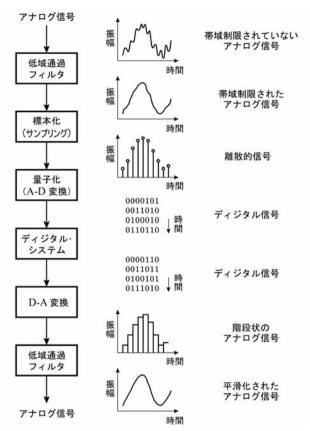


図2-1 典型的なディジタル信号処理システムと各部分での信号のようす

の上では、量子化幅 Δ は0と仮定する. つまり、ディジタル信号処理の理論では"ディジタル"とはいっても信号を図2-2(c)ではなく、図2-2(b)の離散的信号であるものとして扱う. いい換えれば、信号のとり得る値は量子化されていない連続量と仮定する.

その結果、理論と実際では多少の食い違いが生ずることになるが、A-D変換器のビット長を十分にしておけば、実用的にはこの違いは無視できる。もちろんビット長が十分ではない場合には問題になるが、これは誤差の問題として、ディジタル信号処理の中心的な理論とは別に扱う^{注2}。

上で説明したように、通常は、量子化幅を無視するのに対して、ディジタル信号処理では標本化間隔は無視しない。むしろ、標本化間隔が0ではなくある有限の値であるということは、ディジタル信号処理を行う上での大前提となる。

それでは、次に標本化間隔について考える. 図2-3に、アナログ信号を標本化するようすを示す. 図2-3(a)は、時間変動が小さい信号を標本化するようすである. この場合は、標本化された信号を



この種の問題を第7章で扱う.

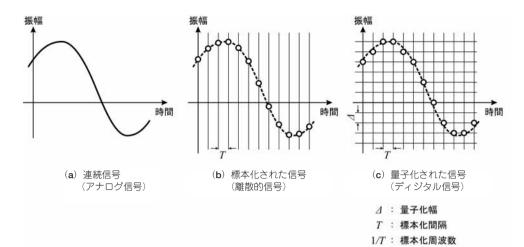


図2-2 アナログ信号の標本化,量子化のようす

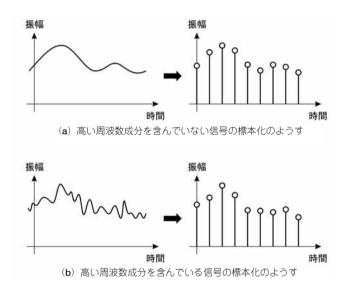


図2-3 アナログ信号と標本化間隔の適,不適

滑らかにつなげていくと元のアナログ信号の波形を想像することができる.一方,図2-3(b)は時間変動の大きい信号の場合で、このときは標本化された信号を滑らかにつなげていっても、元のアナログ信号の波形を想像することはできない.以上のことから、図2-3(b)の場合は標本化の間隔が適切ではなく、標本化の間隔をもっと狭くしなければならないことがわかる.

時間変動の大きい信号とは、いい換えると高い周波数成分を含む信号ということになる.した でする。 般的には高い周波数成分が含まれているアナログ信号を標本化する場合は、その周波数 標本化の間隔を狭くする必要がある.逆に、標本化間隔を最初に決めてしまえば、それに 応じてアナログ信号に含まれる高い周波数の成分を取り除く必要が出てくる。これを行うのが、図 2-1 で標本化の前にある低域通過フィルタで、標本化を行う前にこの低域通過フィルタによりアナログ信号の帯域制限を行い、高い周波数の成分を取り除いている。

以上のことから、標本化の間隔を合理的な理由に基づいて適切に決める必要がある.このとき重要なのが標本化定理で、次の節で説明する.

なお、本書では離散的信号を次のように表現するものとする.

離散的信号の表現

アナログ信号をx(t)とすると、これを間隔Tで標本化して得られる信号は基本的にx(nT)、(n:整数)と書くことができる。しかし、通常のディジタル信号処理システムの中では、Tは一定にする場合が多いので、その場合はTを明記しなくてもとくにさしつかえない。そのため、単にx(n)と書く場合もある。あるいは、nを下付き添え字にして x_n と書く場合もある。

本書では、Tを明記する必要がない場合は、Tと明記する必要がない場合は、Tと可必信号との区別を明確に表すために、Tの以上は書かずに、T0月と書くことにする。

2.3 標本化定理とエイリアシング

高い周波数の成分を含んだアナログ信号を標本化する場合, 2.2節で見てきたように標本化間隔を狭くする必要がある。したがって、標本化間隔は狭ければ狭いほど良いように思われるかもしれない。しかし、標本化間隔を狭くするためには、より高速のA-D変換器やディジタル・システムを使わなければならない。また、単位時間あたりのデータ量も増えてしまうため、データを蓄積したり伝送したりする場合にも不利になってくる。そのため、標本化間隔をむやみに狭くすることはできない。そこで、標本化間隔を決めるための合理的な基準が必要になる。

なお、標本化の過程の数学的な表現と、標本化で得られる離散的信号のスペクトルの関係については**付録2.1**に示す。

(a) 標本化定理

標本化間隔を決めるための基準を規定した定理は標本化定理(sampling theorem)またはサンプリング定理と呼ばれている。この標本化定理によると、標本化間隔は次のように決めればよい。

標本化間隔(標本化周波数)の決め方

標本化の対象となっているアナログ信号が、周波数 f_0 以上の周波数成分をもたない場合、いい換えれば $0\sim f_0$ に帯域制限されていると仮定する 123 .このとき、標本化により得られた離散的信号が、元のアナログ信号のすべての周波数成分に関する情報を失わないようにするためには、標本化間隔Tは次の式を満足する必要がある.



.....(2-1)

なお、標本化間隔Tの逆数1/Tは標本化周波数またはサンプリング周波数と呼ばれる。この標本化周波数を f_c とすると、式(2-1)の代わりに次のように表現できる。

(b) 標本化の例とエイリアシング

標本化定理を理解するために、次のような例を考える。図2-4に、3kHzと7kHzの正弦波を、それぞれ10kHzで標本化したようすを示す。この図からわかるように、3kHzの正弦波も7kHzの正弦波も, 10kHzで標本化してしまえば、図2-4(c)のように離散的信号としてはまったく同じものになる。この例の場合、3kHzは標本化定理を満足するが、7kHzは標本化定理を満足していない。そのため、標本化定理を満足しない7kHzの場合、元のアナログ信号が7kHzの正弦波であるということがわからなくなる。

このように、アナログ信号の中に標本化周波数の1/2よりも高い周波数成分が含まれているとき、

注3:ただし、信号が $f_1 \sim f_2(f_1 > 0)$ の範囲に帯域制限されている場合、標本化周波数 f_1 は次の条件を満足すればよい。

$$\frac{2f_2}{m+1} \le f_s \le \frac{2f_1}{m}, \quad m:$$
 整数

詳しくは次の文献を参照のこと.

P. F. Panter; Modulation, noise, and spectrum analysis, pp.524-527, McGraw-Hill, 1965.

Column A

アナログ信号の再生

 $0 \sim f_0$ に帯域制限されているアナログ信号x(t)を、標本化定理を満足するような標本化間隔Tで標本化する。この信号をx(nT)とする。このとき、標本化周波数 $f_x(=1/T)$ とすると、元のアナログ信号x(t)はx(nT)から次の式により完全に再生することができる。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin\left\{\pi f_s(t-nT)\right\}}{\pi f_s(t-nT)}$$
(A-1)

この式は、離散的信号x(nT)を、遮断周波数が $f_s/2$ の理想的低域通過フィルタに通せば、元のアナログ信号x(t)とまったく同じ信号を再生できるということを意味する。この理想的低域通過フィルタとは次の式で表される周波数特性H(f)をもつフィルタである。

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 0 \le f \le f_s/2 \\ 0, & f > f_s/2 \end{cases}$$
 (A-2)



この理想的低域通過フィルタは,実際に実現することはできない.